L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

1. BREVI RICHIAMI SULLA TEORIA DELLE TRAVI INFLESSE

Si consideri un tratto di trave di lunghezza "dx" soggetto ad un carico ripartito di valore "q" e si indichino con "T" ed "M", lo sforzo di taglio ed il momento flettente nella generica sezione A e "T_1" ed "M_1" le analoghe caratteristiche della sollecitazione nella sezione B posta a distanza "dx" dalla sezione A..

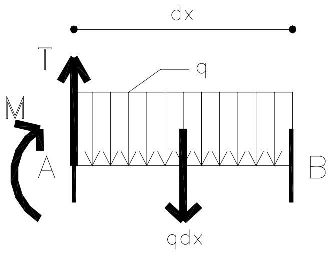


Figura 1

I valori di "T_1" ed "M_1" sono rispettivamente:

$T_1 = T + dT$ ovvero $T_1 = T + q\,dx$

$M_1 = M + dM$ ovvero $M_1 = M + T\,dx - q\,dx\,dx/2$

Essendo "q dx" il carico agente nel tratto AB.

Se si trascura l'infinitesimo del 2° ordine si ottiene: $dT = -q\,dx$ e $dM = T\,dx$

Da cui si ricavano le note e fondamentali relazioni tra il carico "q", lo sforzo di taglio "T" ed il momento flettente "M":

$$\frac{dT}{dx} = -q \quad (1) \qquad \frac{dM}{dx} = T \quad (2) \qquad \text{ovvero} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (3)$$

La derivata dello sforzo di taglio cambiata di segno è uguale al carico agente.
La derivata del momento flettente è uguale allo sforzo di taglio.
La derivata seconda del momento flettente cambiata di segno è uguale al carico agente.

Dalle relazioni (1) e (2) derivano le seguenti considerazioni:

1) nei tratti di trave scarichi – cioè per q=0 – lo sforzo di taglio è costante (T = cost) ed il momento flettente è variabile con legge lineare;
2) nei tratti di trave caricati con carico ripartito – cioè per q≠0 – lo sforzo di taglio T ed il momento flettente M sono variabili con continuità. In particolare,
    - se il carico q è ripartito con legge uniforme, lo sforzo di taglio è variabile con legge lineare ed il momento flettente è variabile con legge parabolica del 2° grado;
    - se il carico q è linearmente variabile (carichi triangolari o trapezoidali), lo sforzo di taglio è variabile con legge parabolica del 2° grado ed il momento flettente è variabile con legge parabolica del 3° grado;
    - ….
3) dalla relazione (2) si deduce che
    - nei tratti di trave dove T = 0, il momento flettente è costante;
    - nei tratti di trave dove M = cost, lo sforzo di taglio è nullo;
    - nei tratti di trave dove T ≠ 0, il momento flettente è variabile. Ciò significa che la sollecitazione tagliante è sempre compresente con la sollecitazione flettente e che la sollecitazione di solo taglio si verifica solo in alcune sezioni isolate (ad esempio in corrispondenza degli appoggi nelle travi appoggiate-appoggiate);
    - nelle sezioni in cui si annulla lo sforzo di taglio, il momento flettente è massimo. Si evidenzia che l'estremo relativo della funzione M(x) è massimo e non minimo in quanto la derivata seconda del momento flettente è negativa (cfr. la relazione (3)).

4) nei tratti di trave compresi tra due carichi concentrati, lo sforzo di taglio T ed il momento flettente M si determinano con le relazioni

$$T = -\int q\,dx + C_1 \qquad\qquad M = \int T\,dx + C_2$$

essendo C_1 e C_2 le costanti di integrazione che si determinano imponendo le condizioni al contorno.

2. LA DEFORMAZIONE DELLE TRAVI SOGGETTE A FLESSIONE

Si consideri una trave ad asse rettilineo ed a sezione costante soggetta alle estremità a due coppie uguali e contrarie di intensità M agenti lungo il piano di sollecitazione contenente l'asse geometrico della trave.

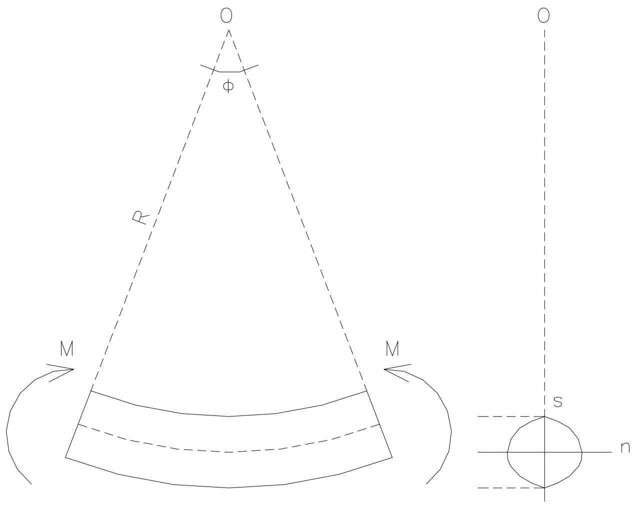


Figura 2

Si supponga che la sezione trasversale della trave sia simmetrica rispetto all'asse di sollecitazione s-s (si ricorda che l'asse di sollecitazione è dato dall'intersezione del piano di sollecitazione con il piano della sezione trasversale).

Considerato lo schema di carico, ogni sezione della trave è sollecitata soltanto da momento flettente di valore costante M.

In queste condizioni

- la trave si inflette e la deformazione di ciascun tratto di trave è costante essendo costante M;
- l'asse geometrico della trave si trasforma in arco circolare di centro O contenuto in un piano detto piano di flessione coincidente con il piano di sollecitazione;
- le fibre che stanno nella parte superiore si accorciano (fibre compresse), mentre quelle che stanno nella parte inferiore si allungano (fibre tese);
- altre fibre conservano la lunghezza originaria. Esse giacciono su un piano – cosiddetto piano neutro. Esso si definisce come il luogo delle fibre che non sono né tese né compresse e sono caratterizzate da una stato tensionale nullo. L'intersezione del piano neutro con il piano della sezione trasversale determina l'asse neutro.

Consideriamo una generica sezione trasversale retta.

Indichiamo con σ_x la tensione relativa all'elemento di area dA distante y dall'asse neutro.

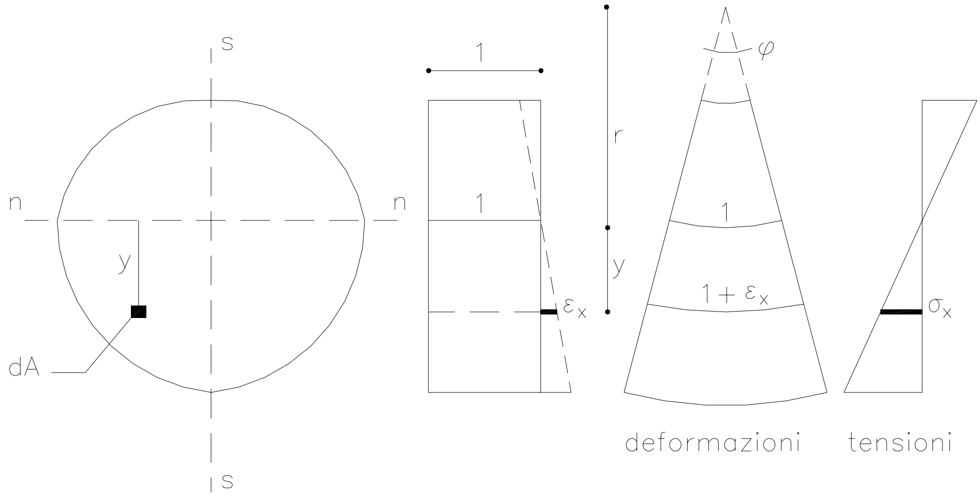


Figura 3

L'insieme degli sforzi σ_x dA che una parte della trave (per esempio la parte destra) trasmette all'altra parte attraverso la sezione considerata deve essere in equilibrio con le forze esterne che agiscono sulla parte sinistra, cioè la coppia M.

Ciò significa che la somma degli sforzi σ_x dA deve risultare uguale a zero e la somma dei momenti σ_x dA *y rispetto all'asse neutro deve risultare uguale a M:

$$\int \sigma_x \mathrm{dA} = 0 \quad (4) \qquad \int y * \sigma_x \mathrm{dA} = M \quad (5)$$

Come è noto, la teoria della flessione si regge su un insieme di ipotesi, fra cui:

- la legge di conservazione delle sezioni piane di Bernoulli-Navier;
- validità della legge di Hooke: $\sigma_x = E\,\varepsilon_x$

La tensione σ_x è direttamente proporzionale alla distanza y dall'asse neutro e risulta uguale a:

$$\sigma_x = \sigma * y \quad (6)$$

essendo σ la tensione a distanza y = 1.

Sostituendo la (6) nella (4) si ottiene: $\sigma \int_A y\,\mathrm{dA} = 0$ da cui $\int_A y\,\mathrm{dA} = 0$

La quantità $\int_A y\,\mathrm{dA}$ rappresenta il momento statico dell'area rispetto all'asse neutro. Pertanto, resta dimostrato che l'asse neutro è baricentrico.

Sostituendo la (6) nella (5) si ottiene: $\sigma \int_A y^2\,\mathrm{dA} = M$ da cui $\sigma = \frac{M}{J}$ (7)

Essendo $\int_A y^2\,\mathrm{dA}$ il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

Sostituendo la (7) nella (6) si ottiene la relazione di Navier che regge il problema della flessione retta

$$\sigma_x = \frac{M * y}{J} \quad (8)$$

Dalla figura 3, si ricava:

$\frac{1+\varepsilon_x}{1} = \frac{r+y}{r}$ e sviluppando e semplificando $\varepsilon_x = \frac{y}{r}$

e sostituendo nella relazione che esprime la legge di Hooke ($\sigma_x = E\,\varepsilon_x$) si ottiene

$$\sigma_x = E\frac{y}{r} \quad (9)$$

Confrontando la (9) con la (8) si ottiene la curvatura $\frac{1}{r}$ (che rappresenta la rotazione φ di due sezioni consecutive poste a distanza unitaria):

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} = \varphi \quad (10)$$

La quantità EJ che figura al denominatore della frazione si chiama modulo di rigidezza a flessione.

Moltiplicando la rotazione φ per la luce della trave si ottiene la rotazione totale della sezione iniziale (x=0) della trave rispetto alla sezione finale (x = l):

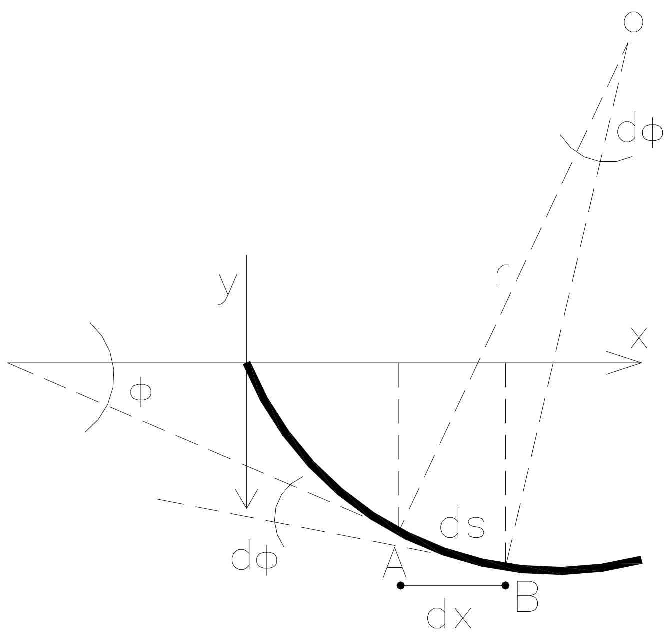
$$\Phi = \varphi * l = \frac{M * l}{EJ}$$

Se il momento flettente M è variabile lungo la trave, l'angolo $d\varphi$ di un tratto di trave di lunghezza dx è pari a: $d\varphi = \frac{M\,dx}{EJ}$

Pertanto la rotazione totale sarà uguale a $\int_0^l \frac{M\,dx}{EJ}$

3. L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

La linea elastica è una curva che rappresenta la forma assunta dall'asse della trave a deformazione avvenuta.



Consideriamo due punti A e B situati sulla linea elastica posti a distanza ds.

Indicando con

- Φ l'angolo formato dalla tangente in A alla curva con l'asse delle X.
- $d\Phi$ l'angolo al centro dell'arco AB
- O il centro di curvatura ed r il raggio di curvatura

Si ha: $ds = r\,d\Phi$ e quindi $\frac{1}{r} = \left|\frac{d\Phi}{ds}\right|$

Il secondo membro è riportato in valore assoluto perché il segno dipende dal sistema di riferimento assunto.

Nel caso in cui il sistema di riferimento viene assunto facendo coincidere l'orogine con l'inizio della trave, l'asse delle ascisse coincidente con l'asse geometrico nella configurazione indeformata e l'asse delle ordinate positivo verso il basso, l'equazione che esprime la curvatura della trave si scriverà:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Phi}{ds} \qquad (11)$$

Considerate le dimensioni piccolissime è lecito confondere ds con dx.

Pertanto, posto $ds \approx dx$; $\Phi \approx tg\,\Phi = dy/dx$ (12)

E sostituendo questi valori nella (11) si ottiene $$\frac{1}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (13)$$

Confrontando la (13) con la (10) si ottiene:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M \qquad (14)$$

La (14) rappresenta l'equazione differenziale della linea elastica.

Nel caso di travi molto snelle, l'inflessione può essere molto grande e le semplificazioni (12) non sono ammissibili. In tal caso è necessario ricorrere all'espressione esatta

$$\Phi = \text{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Pertanto si ha:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\Phi}{ds} = -\frac{d\,\text{arctg}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\frac{dx}{ds}$$

Sviluppando si ottiene:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

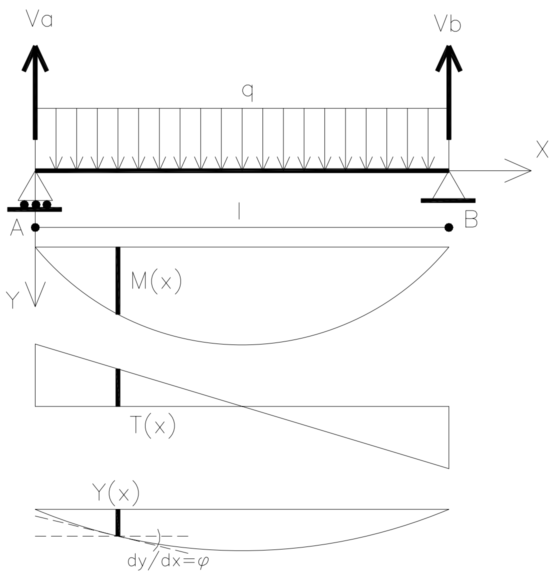
Essendo la quantità $\frac{dy}{dx}$ molto piccola rispetto all'unità, il suo quadrato risulta trascurabile e, pertanto, si ricade nella (13) e, di conseguenza, nella (14).

Deivando la (14) rispetto ad x, e tenuto conto della (2) e della (3), si ottiene:

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3} = -T \qquad (15)$$

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q \qquad (16)$$

3.1 LA TRAVE APPOGGIATA – APPOGGIATA CON CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO



Il momento flettente nella generica sezione x è uguale a:

$$M = \frac{q\,l\,x}{2} - \frac{q\,x^2}{2}$$ (A) (legge di variazione: parabola del 2° ordine)

mentre lo sforzo di taglio, nella stessa sezione, è uguale a:

$$T = \frac{q\,l}{2} - q\,x$$ (A') (legge di variazione: lineare)

Sostituendo nella (14) si ottiene:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q\,l\,x}{2} + \frac{q\,x^2}{2} \qquad \text{(B)}$$

Moltiplicando ambo i membri per dx ed integrando, si ottiene:

$$EJ\frac{dy}{dx} = -\frac{q\,l\,x^2}{4} + \frac{q\,x^3}{6} + C_1 \qquad \text{(C)}$$

Integrando una seconda volta, si ottiene

$$EJ\,y = -\frac{q\,l\,x^3}{12} + \frac{q\,x^4}{24} + C_1\,x + C_2 \qquad \text{(D)}$$

Per determinare le costanti di integrazione imponiamo le condizioni al contorno.

Considerata la simmetria di carico e di geometria, la rotazione in mezzeria (x=l/2) è nulla in quanto la tangente è orizzontale. Pertanto dalla (C), essendo la rotazione dy/dx = 0, si ottiene:

$$0 = -\frac{q\,l}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + C_1 \qquad \text{da cui} \qquad C_1 = \frac{q\,l^3}{24}$$

Dalla (D), osservando che in corrispondenza dell'appoggio A (x=0) l'abbassamento è uguale a zero, si ottiene $C_2 = 0$

Sostituendo nell'equazione (C) il valore di C_1 si ottiene la legge di variazione delle rotazioni lungo la trave:

$$\varphi(x) = \frac{q}{24\,EJ}\left(4\,x^3 - 6\,l\,x^2 + l^3\right) \qquad \text{(E)}$$

Dall'equazione (D), si ricava l'equazione della linea elastica della trave analizzata:

$$y(x) = \frac{q}{24\,EJ}\left(l^3\,x - 2\,l\,x^3 + x^4\right) \qquad \text{(F)}$$

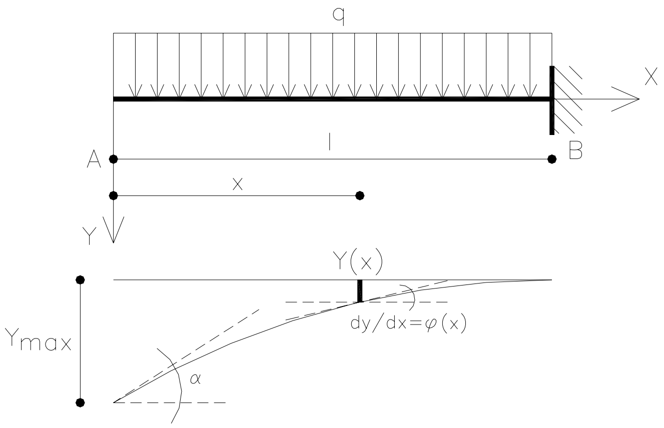
L'abbassamento massimo si verifica in mezzeria (x = l/2). Sostituendo nella (F) il valore x = l/2, si ottiene:

$$y = \frac{5}{384}\frac{q\,l^4}{EJ}$$

La rotazione massima si verifica in corrispondenza degli appoggi A (α; x=0) e B (β; x=l). Sostituendo nella (E), si ottiene

$$\alpha = -\beta = \frac{q\,l^3}{24\,EJ}$$

3.2 LA TRAVE A SBALZO CON CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO



Il momento flettente nella generica sezione x è uguale a:

$$M = -\frac{q\,x^2}{2}$$ (A) (legge di variazione: parabola del 2° ordine)

Sostituendo nella (14) si ottiene:

$$EJ\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q\,x^2}{2} \qquad \text{(B)}$$

Moltiplicando ambo i membri per dx ed integrando, si ottiene:

$$EJ\,\frac{dy}{dx} = \frac{q\,x^3}{6} + C_1 \qquad \text{(C)}$$

Integrando una seconda volta, si ottiene

$$EJ\,y = \frac{q\,x^4}{24} + C_1\,x + C_2 \qquad \text{(D)}$$

Per determinare le costanti di integrazione imponiamo le condizioni al contorno.

Osserviamo che in corrispondenza dell'incastro B (x=l) devono essere nulli tanto l'abbassamento quanto la rotazione.

Dalla (C), per x= l si ottiene: $0 = \frac{q\,l^3}{6} + C_1$ da cui segue $C_1 = -\frac{q\,l^3}{6}$

Dalla (D), per x= l si ottiene: $0 = \frac{q\,l^4}{24} - \frac{q\,l^3}{6}\,l + C_2$ da cui segue $C_2 = \frac{q\,l^4}{8}$

Sostituendo nell'equazione (C) il valore di C_1 si ottiene la legge di variazione delle rotazioni lungo la trave:

$$\varphi(x) = \frac{q}{6\,EJ}\left(x^3 - l^3\right) \qquad \text{(E)}$$

Dall'equazione (D), si ricava l'equazione della linea elastica della trave analizzata:

$$y(x) = \frac{q}{24\,EJ}\left(3\,l^4 - 4\,l^3\,x + x^4\right) \qquad \text{(F)}$$

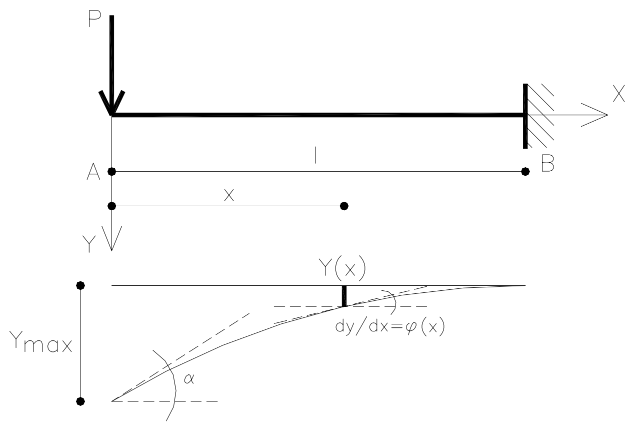
L'abbassamento massimo si verifica all'estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (F) il valore x = 0, si ottiene:

$$y = \frac{q\,l^4}{8\,EJ}$$

La rotazione massima si verifica all'estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (E), si ottiene

$$\alpha = -\frac{q\,l^3}{6\,EJ}$$

3.3 LA TRAVE A SBALZO CON CARICO CONCENTRATO NELL’ESTREMO LIBERO



Il momento flettente nella generica sezione x è uguale a:

$M = -P\,x$ (A) (legge di variazione: lineare)

Sostituendo nella (14) si ottiene:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P\,x \qquad \text{(B)}$$

Moltiplicando ambo i membri per dx ed integrando, si ottiene:

$$EJ\frac{dy}{dx} = \frac{P\,x^2}{2} + C_1 \qquad \text{(C)}$$

Integrando una seconda volta, si ottiene

$$EJ\,y = \frac{P\,x^3}{6} + C_1\,x + C_2 \qquad \text{(D)}$$

Per determinare le costanti di integrazione imponiamo le condizioni al contorno.

Osserviamo che in corrispondenza dell’incastro B (x=l) devono essere nulli tanto l’abbassamento quanto la rotazione.

Dalla (C), per x= l si ottiene: $0 = \frac{P\,l^2}{2} + C_1$ da cui segue $C_1 = -\frac{P\,l^2}{2}$

Dalla (D), per x= l si ottiene: $0 = \frac{P\,l^3}{6} - \frac{P\,l^2}{2}\,l + C_2$ da cui segue $C_2 = \frac{P\,l^3}{3}$

Sostituendo nell’equazione (C) il valore di C_1 si ottiene la legge di variazione delle rotazioni lungo la trave:

$$\varphi(x) = \frac{P}{2\,EJ}\left(x^2 - l^2\right) \qquad \text{(E)}$$

Dall’equazione (D), si ricava l’equazione della linea elastica della trave analizzata:

$$y(x) = \frac{P}{6\,EJ}\left(x^3 - 3l^2\,x + 2\,l^3\right) \qquad \text{(F)}$$

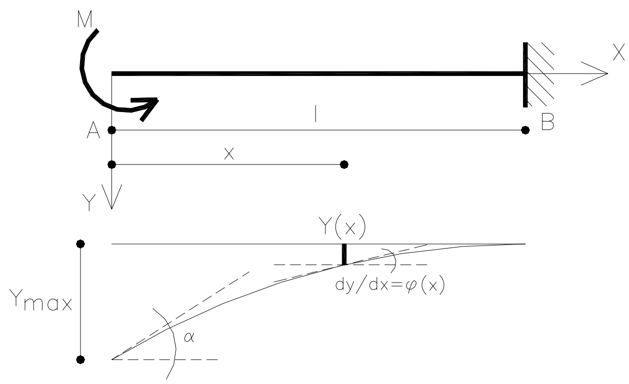
L’abbassamento massimo si verifica all’estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (F) il valore x = 0, si ottiene:

$$y = \frac{P\,l^3}{3\,EJ}$$

La rotazione massima si verifica all'estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (E), si ottiene

$$\alpha = -\frac{P\,l^2}{2\,EJ}$$

3.4 LA TRAVE A SBALZO CON COPPIA APPLICATA NELL'ESTREMO LIBERO



Il momento flettente è costante in tutte le sezioni della trave:

M = - M (A) (legge di variazione: costante)

Sostituendo nella (14) si ottiene:

$$EJ\,\frac{d^2y}{dx^2} = M \qquad \text{(B)}$$

Moltiplicando ambo i membri per dx ed integrando, si ottiene:

$$EJ\,\frac{dy}{dx} = M\,x + C_1 \qquad \text{(C)}$$

Integrando una seconda volta, si ottiene

$$EJ\,y = \frac{M\,x^2}{2} + C_1\,x + C_2 \qquad \text{(D)}$$

Per determinare le costanti di integrazione imponiamo le condizioni al contorno.

Osserviamo che in corrispondenza dell'incastro B (x=l) devono essere nulli tanto l'abbassamento quanto la rotazione.

Dalla (C), per x= l si ottiene: $0 = M\,l + C_1$ da cui segue $C_1 = -M\,l$

Dalla (D), per x= l si ottiene: $0 = \frac{M\,l^2}{2} - M\,l^2 + C_2$ da cui segue $C_2 = \frac{M\,l^2}{2}$

Sostituendo nell'equazione (C) il valore di C_1 si ottiene la legge di variazione delle rotazioni lungo la trave:

$$\varphi(x) = \frac{M}{EJ}\left(x - l\right) \qquad \text{(E)}$$

Dall'equazione (D), si ricava l'equazione della linea elastica della trave analizzata:

$$y(x) = \frac{M}{2\,EJ}\left(x^2 - 2\,l\,x + l^2\right) \qquad \text{(F)}$$

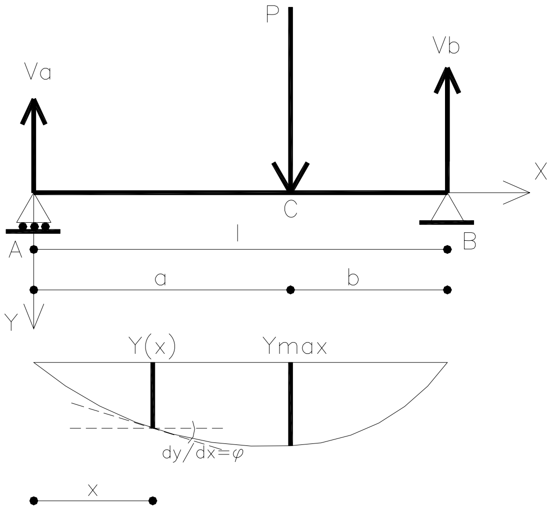
L'abbassamento massimo si verifica all'estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (F) il valore x = 0, si ottiene:

$$y = \frac{M\,l^2}{2\,EJ}$$

La rotazione massima si verifica all'estremo libero (x = 0). Sostituendo nella (E), si ottiene

$$\alpha = -\frac{M\,l}{EJ}$$

3.5 LA TRAVE APPOGGIATA – APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO



In questo caso l'espressione del momento flettente è diversa nei due tratti di trave AC e CB.

Reazioni vincolari: $Va = \frac{P\,b}{l}$ $Vb = \frac{P\,a}{l}$

- Tratto AC: x ≤ a $M = \frac{P\,b}{l}\,x$ sostituendo nella (14) si ha: $EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\,b}{l}\,x$ (A)
- Tratto CB: x≥ a $M = \frac{P\,b}{l}\,x - P(x - a)$ sostituendo nella (14) si ha: $EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\,b}{l}\,x + P(x - a)$ (B)

Integrando le (A) e (B), si ottiene:

- Tratto AC: x ≤ a $EJ\frac{dy}{dx} = -\frac{P\,b}{2\,l}\,x^2 + C$ (A1)
- Tratto CB: x≥ a $EJ\frac{dy}{dx} = -\frac{P\,b}{2\,l}\,x^2 + \frac{P(x - a)^2}{2} + C_1$ (B1)

Considerato che i due tratti della linea elastica devono avere la tangente in comune nel punto di applicazione del carico P, le costanti di integrazione C e C_1 devono essere uguali.

Posto $C = C_1$ ed integrando una seconda volta, si ottiene:

- Tratto AC: x ≤ a $EJ\,y = -\frac{P\,b}{6\,l}\,x^3 + C\,x + C_2$ (A2)

- Tratto CB: x≥ a $$EJ\,y = -\frac{P\,b}{6\,l}x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6} + C\,x + C_3 \qquad (B2)$$

Considerato che i due tratti della linea elastica devono avere lo stesso abbassamento nel punto di applicazione del carico P, le espressioni (A2) e (B2) devono essere uguali per x = a. Ciò comporta che le costanti di integrazione C_2 e C_3 risultino uguali.

Pertanto, il problema si riduce a determinare solo due costanti di integrazione: C e C_2. Esse si calcolano imponendo le condizioni al contorno che, nel caso specifico, consistono nell'imporre la nullità degli abbassamenti in corrispondenza degli appoggi, cioè per x = 0 e per x = l.

Dalla equazione (A2), imponendo y = 0 in corrispondenza dell'ascissa x=0, si ha: $C_2 = 0$ e quindi anche $C_3 = 0$

Dalla equazione (B2), imponendo y = 0 in corrispondenza dell'ascissa x=l, si ha:

$$0 = -\frac{P\,b}{6\,l}l^3 + \frac{P(l-a)^3}{6} + C\,l \qquad 0 = -\frac{P\,b}{6}l^2 + \frac{P\,b^3}{6} + C\,l$$ da cui segue

$$C = \frac{P\,b\,l}{6} - \frac{P\,b^3}{6\,l} = \frac{P\,b(l^2 - b^2)}{6\,l}$$

Sostituendo i valori trovati nelle (A2) e (B2) si ottengono le leggi di variazione della linea elastica nei due tratti di trave:

- Tratto AC: x ≤ a $$y = -\frac{P\,b}{6\,l\,EJ}x^3 + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ}x \qquad (A3)$$
- Tratto CB: x≥ a $$y = -\frac{P\,b}{6\,l\,EJ}x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6\,EJ} + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ}x \qquad (B3)$$

L'equazione (A3) consente di calcolare gli abbassamenti nel tratto AC, mentre la (B3) consente di calcolare gli abbassamenti nel tratto CB.

Sostituendo i valori trovati nelle (A1) e (B1) si ottengono le leggi di variazione delle rotazioni nei due tratti di trave:

- Tratto AC: x ≤ a $$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\,b}{2\,l\,EJ}x^2 + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ} \qquad (A4)$$
- Tratto CB: x≥ a $$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\,b}{2\,l\,EJ}x^2 + \frac{P(x-a)^2}{2\,EJ} + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ} \qquad (B4)$$

L'equazione (A4) consente di calcolare le rotazioni nel tratto AC, mentre la (B4) consente di calcolare le rotazioni nel tratto CB.

Le rotazioni nelle sezioni di estremità – A e B – valgono rispettivamente:

- $$\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ}$$
- $$\beta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{P\,b}{2\,l\,EJ}l^2 + \frac{P(l-a)^2}{2\,EJ} + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ}$$ da cui, sviluppando e mettendo a fattor comune, si ha: $$\beta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{P\,a\,b}{6\,l\,EJ}(l+a)$$

L'abbassamento massimo si ha nel punto in cui la tangente alla linea elastica è orizzontale.

Se a > b – come nel caso in figura – l'abbassamento massimo si ha nel tratto di sinistra AC è sufficiente porre uguale a zero l'equazione (A4) che rappresenta la derivata prima della (A3):

$$-\frac{P\,b}{2\,l\,EJ}x^2 + \frac{P\,b(l^2-b^2)}{6\,l\,EJ} = 0 \qquad \frac{P\,b}{6\,l\,EJ}\left(-3\,x^2 + l^2 - b^2\right) = 0$$ e risolvendo l

l'equazione $3x^2 - l^2 + b^2 = 0$ si ottiene $x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$

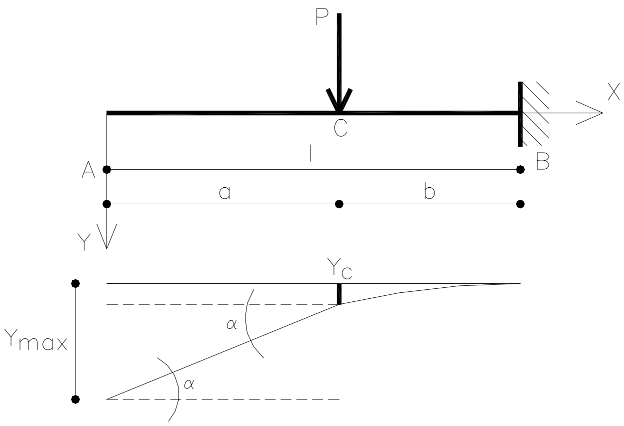
Pertanto, l'abbassamento massimo si ottiene sostituendo nell'equazione (A3) alla x il valore trovato:

$$y_{max} = (y)_{x=\frac{\sqrt{l^2-b^2}}{\sqrt{3}}} = \frac{P\,b\sqrt{\left(l^2 - b^2\right)^3}}{9\sqrt{3}\,l\,EJ}$$

Se il carico è applicato in mezzeria, l'abbassamento massimo si avrà in mezzeria. Per determinare il valore basta porre b = l/2 nella relazione che esprime y_{max}

$$y_{max} = (y)_{x=l/2;\,a=b} = \frac{P\,l^3}{48\,EJ}$$

3.6 LA TRAVE A SBALZO CON CARICO CONCENTRATO IN UN PUNTO GENERICO



Quando il carico è applicato in un punto generico C distante b dall'incastro, il tratto CB si inflette, mentre il tratto AC non si deforma e rimane rettilineo.

Per risolvere il problema possiamo applicare i risultati ottenuti al punto 3.3.

$$\alpha = \frac{P\,b^2}{2\,EJ} = \frac{P\,(l - a)^2}{2\,EJ}$$

L'abbassamento massimo si ottiene facilmente mediante la relazione $y_{max} = y_C + \alpha * a$

Utilizzando i risultati di cui al punto 3.3, si ottiene:

$y_{max} = \frac{P\,b^3}{3\,EJ} + \frac{P\,b^2}{2\,EJ}a$ da cui, sviluppando e mettendo a fattor comune si ha: $y_{max} = \frac{P}{6\,EJ}\left(2\,l^3 - 3\,l^2\,a + a^3\right)$

4. CONCLUSIONI

Il metodo di calcolo presentato è estensibile ad altre situazioni di vincolo e di carico.

Casi più complessi possono essere facilmente risolti applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.