

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE $y(t) \quad t \in I$

- equazione differenziale di ordine n $F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$
- equazione differenziale autonoma $F(y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$

un'equazione differenziale si dice autonoma se non compare esplicitamente la variabile indipendente.

- equazione differenziale in forma normale $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

è sempre bene riuscire ad esplicitare la derivata di ordine maggiore in funzione delle derivate di ordine minore.

come fare per esplicitare la derivata di ordine maggiore

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) = b(t) \quad a_0(t) \neq 0$$

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^{(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y(t) + \frac{b}{a_0(t)}$$

Passaggio da equazione differenziale a sistema di equazioni differenziali

$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) = y(t) \\ y_2(t) = y'(t) \\ y_3(t) = y''(t) \\ \vdots \\ y_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y'_1(t) = y_2(t) \\ y'_2(t) = y_3(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

è quindi possibile vedere un'equazione differenziale di ordine n come un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine.

Forma scalare di un sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'_1(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ y'_2(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y'_n(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

Forma vettoriale di un sistema di equazioni differenziali

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t))$$

Forma generale di un sistema di equazioni differenziali

- $$\begin{cases} y'_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b(t) \\ y'_2(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + b(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b(t) \end{cases}$$

- $$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y}' = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

- La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo $y(t) \in C^n(I)$, la soluzione del sistema di equazioni differenziali è del tipo $\underline{y}(t) \in C^1(I)$.
- Le soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n sono sempre una famiglia di infinite soluzioni dipendenti da n costanti arbitrarie.

Integrale generale

Tutte le soluzioni della famiglia costituiscono l'integrale generale. È molto difficile riuscire a trovare l'integrale generale, è facilmente riconoscibile solo nel caso di equazioni lineari autonome.

Equazioni differenziali del primo ordine (equazioni, sistemi, vettori)**Problema di Cauchy per i sistemi lineari del primo ordine**

$$\begin{cases} (1) & \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)) \\ (2) & \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases}$$

Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy per i sistemi lineari del primo ordine

Siano $\underline{b}(t), A(t) \in C^0(I)$

$$\text{allora il problema } \begin{cases} \underline{y}'(t) = A(t) \cdot \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \\ \underline{y}(t) = \underline{\xi} \end{cases}$$

ammette una sola soluzione $y(t) \in C^1(I)$ definita in tutto l'intervallo I .

Principio di sovrapposizione

$$\begin{cases} \underline{y}'_1(t) = A(t) \cdot \underline{y}_1(t) + \underline{b}_1(t) \\ \underline{y}'_2(t) = A(t) \cdot \underline{y}_2(t) + \underline{b}_2(t) \end{cases}$$

$$\underline{X} = \underbrace{c_1 \underline{y}_1(t) + c_2 \underline{y}_2(t)}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{X} \cdot A(t) = c_1 A(t) \underline{y}_1(t) + c_2 A(t) \underline{y}_2(t) \\ \underline{X} \cdot A(t) = A(t) \cdot (c_1 \underline{y}_1(t) + c_2 \underline{y}_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{X}' = A(t) \underline{X} + (c_1 \underline{b}_1(t) + c_2 \underline{b}_2(t)) = \underline{y}'_1(t) + \underline{y}'_2(t)$$

Problema di Cauchy per le equazioni ed i vettori del primo ordine

$$\text{Vettori } \begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases}$$

$$\text{Equazioni } \begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(\tau) = \xi_1 \quad y'(\tau) = \xi_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(\tau) = \xi_n \end{cases}$$

Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy per le equazioni ed i vettori del primo ordine

$$\text{Vettori } \underline{y}'(t) = A(t) \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad (1)$$

$$\text{Equazioni } y^{(n)}(t) = a_1(t) y^{(n-1)}(t) + a_2(t) y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n(t) y(t) + b(t)$$

se $A(t), \underline{b}(t), a_i(t), b(t) \in C^0(I)$ il problema di Cauchy ammette una sola soluzione definita in tutto l'intervallo I .

Principio di sovrapposizione

sia $\underline{\varphi}(t)$ soluzione di (1) con $\underline{b}(t) = \underline{b}_1(t)$

sia $\underline{\psi}(t)$ soluzione di (1) con $\underline{b}(t) = \underline{b}_2(t)$

$$\underline{X}(t) = c_1 \underline{\varphi}(t) + c_2 \underline{\psi}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{X}'(t) = A(t) \underline{X}(t) + (c_1 \underline{b}_1(t) + c_2 \underline{b}_2(t))$$

$$\text{Sistema omogeneo } \underline{z}'(t) = A(t) \underline{z}(t) \quad (2)$$

ogni combinazione lineare di soluzioni del sistema omogeneo è ancora una soluzione dello stesso sistema omogeneo.

L'insieme Z delle soluzioni del sistema omogeneo costituisce uno spazio lineare, sottospazio di $C^1(I)$.

$$\text{Sistema non omogeneo (completo)} \quad \underline{y}'(t) = A(t) \underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad (1)$$

i) sia $\underline{\psi}(t)$ soluzione di (2)

sia $\underline{\varphi}(t)$ soluzione di (1)

allora $\underline{\psi}(t) + \underline{\varphi}(t)$ è soluzione di (1)

Tutte e solo le soluzioni del sistema completo si ottengono dalle soluzioni del sistema omogeneo associato aggiungendo una qualsiasi soluzione particolare del sistema completo.

- ii) sia $h(t)$ una fissata soluzione di (1)
 sia $\psi(t)$ una qualsiasi soluzione di (1)
 allora $\varphi(t) = h(t)\psi(t)$ è soluzione di (2)

Alcune soluzioni del sistema omogeneo si ottengono moltiplicando due soluzioni particolari del sistema completo.

L'insieme Y delle soluzioni del sistema completo costituisce uno spazio affine, sottospazio di $C^1(I)$.

Osservazione: significato di spazio affine

X : spazio lineare

Z : sottospazio lineare di X

$\underline{h} \in X \quad \underline{h} \notin Z$

si dice spazio affine uno spazio vettoriale $\{\underline{y} \in X : \underline{y} = \underline{h} + \underline{z}, \underline{z} \in Z\}$

Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy per il sistema omogeneo

$$\begin{cases} \underline{z}'(t) = A(t)\underline{z}(t) \\ \underline{z}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases} \quad (3)$$

$\forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ esiste una sola soluzione di (3)

$\Rightarrow \underline{y}(t) \leftrightarrow \underline{\xi}$ corrispondenza biunivoca

Isomorfismo

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^1 &\leftrightarrow \underline{\xi}^1 & \underline{\varphi}^1 + \underline{\varphi}^2 &\leftrightarrow \underline{\xi}^1 + \underline{\xi}^2 \\ \underline{\varphi}^2 &\leftrightarrow \underline{\xi}^2 & c\underline{\varphi}^1 &\leftrightarrow c\underline{\xi}^1 \end{aligned} \quad (3)$$

se valgono tutte queste relazioni Z e \mathbb{R}^n sono *isomorfi* \Rightarrow due spazi lineari isomorfi hanno la stessa dimensione.

Soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

$$e^{-a(t)}y'(t) = a(t)y(t)e^{-a(t)} + b(t)e^{-a(t)}$$

$$\underbrace{e^{-a(t)}y'(t) - a(t)y(t)e^{-a(t)}}_{\downarrow} = b(t)e^{-a(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(y(t)e^{-a(t)}) = e^{-a(t)}b(t)$$

$$y(t)e^{-a(t)} = \int_{\tau}^t e^{-a(s)}b(s)ds + C$$

$$y(t) = e^{a(t)} \int_{\tau}^t e^{-a(s)}b(s)ds + Ce^{a(t)}$$

identicamente si procede nei casi di sistemi di equazioni o vettori

E' tuttavia possibile calcolare le soluzioni solo se il determinante della matrice Wronskiana costruita con le soluzioni trovate ad essi associata è diverso da zero. Ossia affinché le soluzioni esistano è necessario che tutte le soluzioni siano linearmente indipendenti.

Vettori

$$\underline{z}'(t) = A(t)\underline{z}(t)$$

$$c_1\underline{\varphi}^1(t) + c_2\underline{\varphi}^2(t) + \dots + c_n\underline{\varphi}^n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_1^2 & \dots & \varphi_1^n \\ \varphi_2^1 & \varphi_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n^1 & \varphi_n^2 & \dots & \varphi_n^n \end{pmatrix} = \underline{\underline{W}}(t)$$

$\det W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ affinché gli elementi siano linearmente indipendenti.

Sistemi di equazioni

$$z^{(n)}(t) = a_1(t)z^{(n-1)}(t) + a_2(t)z^{(n-2)}(t) + \dots + a_n(t)z(t)$$

$$c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$c_1\varphi_1'(t) + \dots + c_n\varphi_n'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$c_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underline{\underline{W}}(t)$$

$\det W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ affinché gli elementi siano linearmente indipendenti.

In entrambi i casi si ha:

$$\underline{z}(t) = W(t) \cdot \underline{c} = c_1\underline{\varphi}_1(t) + c_2\underline{\varphi}_2(t) + \dots + c_n\underline{\varphi}_n(t)$$

esempio

$$z'' + \omega^2 z = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \sin(\omega t) \\ \varphi_2(t) = \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\det(W(t)) = -\omega \sin^2(\omega t) - \omega \cos^2(\omega t) = -\omega \neq 0$$

e quindi le due soluzioni sono linearmente indipendenti

$$z(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

esempio 2

$$\varphi_1(t) = t^2 \quad \varphi_2(t) = t|t|$$

$$\det \begin{pmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{pmatrix} = 2t^2|t| - 2t^2|t| = 0$$

queste due funzioni teoricamente non sono indipendenti

$$c_1 t^2 + c_2 t|t| = 0 \quad \forall t$$

proviamo con $t=1$

$$c_1 + c_2 = 0$$

proviamo con $t=-1$

$$c_1 - c_2 = 0$$

$$c_1 = c_2$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

allora sono indipendenti.

- Con ciò vogliamo dire che le 2 funzioni sono dipendenti o indipendenti se $\det = 0$ o $\det \neq 0$ solo se le due funzioni sono soluzione di un'equazione differenziale.
- In questo caso queste 2 soluzioni non erano soluzione di un'equazione differenziale.

La matrice $W(t)$ è chiamata *matrice Wronskiana* ed il suo determinante è detto *determinante Wronskiano*.

Teorema di Lionville (per il calcolo del determinate Wronskiano)

$$\det W(t) = W(\tau) \cdot e^{\int_{\tau}^t \text{tr} A(s) ds}$$

$\text{tr} A$: è la somma degli elementi della diagonale principale.

$$\det W(t) = W(\tau) \cdot e^{\int_{\tau}^t a_{ii}(s) ds}$$

Sistemi con matrici costanti

$$z'(t) = A \cdot z(t)$$

sistema omogeneo a coefficienti costanti

$$z^{(n)}(t) = a_1 z^{(n-1)}(t) + a_2 z^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1} z'(t) + a_n$$

equazione omogenea a coefficienti costanti

le soluzioni sono date da $z(t) = e^{\lambda t}$ essendo $\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ **esempio**

$$\begin{cases} z'' - z = 0 \\ z'' + z = 0 \\ z'' - 2z' + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \pm 1 \quad \lambda_2 = \pm i$$

$$\begin{bmatrix} e^t; e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it}; e^{-it} \end{bmatrix}$$

Problema di Cauchy per i sistemi con matrici costanti

$$(1) \quad \underline{z}' = A \underline{z} \quad t \in I$$

$$c_1 \underline{\varphi}^1 + c_2 \underline{\varphi}^2 + \dots + c_n \underline{\varphi}^n = W(t)$$

$$(2) \quad \underline{z}(\tau) = \underline{\xi}$$

- La matrice di transizione dal tempo τ al tempo t è la $\underline{W}(t)$ tale che $\underline{W}(\tau) = I_n$.

La soluzione del problema di Cauchy (1)+(2) si scrive: $\underline{\varphi}(t) = \underline{W}(t, \tau) \cdot \underline{\xi}$

$$(1) \quad \underline{z}' = A \underline{z} \quad \text{con } A \text{ costante (i suoi elementi non dipendono dal tempo)}$$

$$(2) \quad z^{(n)}(t) = a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z$$

soluzione di (2)cerchiamo soluzioni della forma $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

$$D(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - \lambda^n a_{n-1} - a_n$$

$$D(\lambda) = 0 \quad \text{equazione caratteristica (omogenea associata)}$$

- i) n radici distinte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ sono n soluzioni dell'equazione (2). Per vedere se queste soluzioni sono indipendenti occorre calcolare il determinante della matrice Wronskiana.

$$\underline{W}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^n e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$\det W(t) = e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)$$

questo determinante si dice determinante di Vandemonde (o delle differenze).

- ii) l'equazione $D(\lambda) = 0$ possiede le radici

$$\lambda_1 \text{ con molteplicità } m_1 \Rightarrow \text{le soluzioni sono } e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}$$

$$\lambda_2 \text{ con molteplicità } m_2 \Rightarrow \text{le soluzioni sono } e^{\lambda_2 t}, t e^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \dots$$

$$\lambda_r \text{ con molteplicità } m_r \Rightarrow \text{le soluzioni sono } e^{\lambda_r t}, t e^{\lambda_r t}, \dots$$

$$r < n \quad \sum_{i=1}^r m_i = n$$

$$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} \text{ due soluzioni distinte che si possono scrivere anche come } \left\{ e^{\lambda_1 t}, \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\}$$

perché devo aggiungere $t \cdot$?

Poiché se ho due soluzioni coincidenti ottengo che $\lambda_2 = \lambda_1$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{t \cdot e^{\lambda_1 t}}{1} \quad (\text{equivale a fare la derivata rispetto a } \lambda_2)$$

esempio

$$z'''' - 4z'' + 8z' - 8z = 0$$

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

$$e^{(1+i)t}, te^{(1+i)t}, e^{(1-i)t}, te^{(1-i)t}$$

$$\begin{cases} e^t (\cos t + i \sin t) \\ te^t (\cos t + i \sin t) \\ e^t (\cos t - i \sin t) \\ te^t (\cos t - i \sin t) \end{cases}$$

$$e^t \cos t, e^t \sin t, t \cdot e^t \cos t, t \cdot e^t \sin t$$

Autovalori della matrice

$$(1) \quad z'(t) = \underline{A} \cdot z(t) \quad z(t) = \underline{h}e^{\lambda t} \rightarrow z'(t) = \lambda \underline{h}e^{\lambda t}$$

$$\lambda \cdot e^{\lambda t} \underline{h} = \underline{A} \cdot \underline{h} \cdot e^{\lambda t}$$

$$\underline{A}\underline{h} = \lambda \underline{h} \quad \text{equazione degli autovalori della matrice } \underline{A} \quad (1).$$

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{h} = 0 \quad \text{equazione degli autovalori (2)}$$

$$|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0 \quad \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

i) n radici distinte

$$\begin{cases} \lambda_1 \rightarrow \underline{h}^1 \\ \lambda_2 \rightarrow \underline{h}^2 \\ \lambda_n \rightarrow \underline{h}^n \end{cases} \Rightarrow \underline{h}^1 e^{\lambda_1 t}, \underline{h}^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \underline{h}^n e^{\lambda_n t}$$

esempio

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 - z_3 \\ z'_2 = 2z_1 - z_2 + 6z_3 \\ z'_3 = z_2 - z_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1 - \lambda & 6 \\ 0 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases}$$

determino i corrispondenti autovettori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} h_2 - h_3 = 0 \\ 2h_1 + h_2 + 6h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2 = h_3 \\ 2h_1 + 7h_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2 = h_3 \\ h_1 = -\frac{7}{2}h_2 \end{cases} \quad \underline{h}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -3h_1 + h_2 - h_3 = 0 \\ 2h_1 - 2h_2 + 6h_3 = 0 \\ h_2 - 4h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{h}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

trasformazioni di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n (applicazioni, funzioni)

$$\partial: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \partial(c_1 \underline{x} + c_2 \underline{y}) = c_1 \partial(\underline{x}) + c_2 \partial(\underline{y})$$

se $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ è un altro riferimento, la stessa trasformazione è rappresentata da una matrice \tilde{A} .

$$\text{Definiamo un vettore } \underline{S} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \dots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = S^{-1}AS$$

$$\text{Definiamo una matrice } \underline{\Lambda} \text{ diagonale se è così fatta: } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{se } \underline{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\begin{cases} z'_1 = \lambda_1 z_1 \\ z'_2 = \lambda_2 z_2 \\ z'_n = \lambda_n z_n \end{cases} \quad \text{il sistema è disaccoppiato, le equazioni sono indipendenti.}$$

una matrice è diagonalizzabile se possiede n autovettori linearmente indipendenti, cioè se ha n autovalori distinti.

i) n radici distinte

$$\lambda_1 \rightarrow h_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow h_2$$

$$\lambda_n \rightarrow h_n$$

ii) radici coincidenti

$$\lambda_1 \text{ con molteplicità } m_1$$

$$\lambda_n \text{ con molteplicità } m_n$$

molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = m$

molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = d$

la molteplicità algebrica è il numero di radici coincidenti in un unico punto.

la molteplicità geometrica è il numero di autovettori che corrispondono a quella radice.

se $d=m$ l'autovalore si dice *regolare*

se $d < m$ l'autovalore si dice *non regolare*

Riassumendo (Autovalori della matrice)

$$\underline{z}' = A\underline{z} \quad \underline{z} = \underline{h}e^{\lambda t} \quad A\underline{h} = \lambda\underline{h}$$

i) A possiede autovalori semplici oppure multipli regolari

ii) A possiede autovalori multipli anche non regolari

$$\text{i) } h^1 \dots h^n \quad S = (h^1 \dots h^n) \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$AS = S\Lambda \quad \Lambda = S^{-1}AS$$

$$\underline{z} = S\underline{y} \quad S\underline{y}' = AS\underline{y} \quad \underline{y}' = S^{-1}AS\underline{y} = \Lambda\underline{y}$$

definiamo e^{Λ}

$$e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

proprietà

$$\begin{cases} e^{\Lambda(t+s)} = e^{\Lambda t} \cdot e^{\Lambda s} \\ (e^{\Lambda t})^{-1} = e^{-\Lambda t} \\ \frac{d}{dt} e^{\Lambda t} = \Lambda e^{\Lambda t} \end{cases}$$

$$\underline{y}(t) = e^{\Lambda t} \underline{c}$$

$$\underline{z}(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} \tilde{\underline{c}}$$

definiamo e^A

$$e^A = S e^{\Lambda} S^{-1}$$

$$\underline{z}(t) = e^{At} \underline{c}$$

Problema di Cauchy per equazioni con matrici

$$\begin{cases} \underline{z}' = A\underline{z} \\ \underline{z}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases} \Rightarrow \underline{z}(t) = e^{A(t-\tau)} \underline{\xi}$$

Sistemi di equazioni di tipo Eulero

$$A(t) = \frac{1}{t} A$$

$$\begin{cases} t > 0 \\ t = e^s \end{cases} \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{t} \frac{d}{ds}$$

$$\begin{cases} t < 0 \\ t = -e^s \end{cases}$$

$$z'(t) = \frac{1}{t} A z(t) \quad \frac{1}{t} \frac{d}{ds} z = \frac{1}{t} A z \quad \frac{d}{ds} z = A z \quad e^{\lambda t} = t^{\lambda}$$

Equazioni di tipo Eulero

$$\begin{cases} z^{(n)}(t) = \frac{a_1}{t} z^{(n-1)}(t) + \frac{a_2}{t^2} z^{(n-2)}(t) + \dots + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} z'(t) + \frac{a_n}{t^n} z(t) \\ z(t) = t^{\lambda} \end{cases}$$

$$\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)t^{\lambda-n} = a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)t^{\lambda-n} + \dots + a_{n-1}\lambda t^{\lambda-n} + a_n t^{\lambda-n}$$

otteniamo un'equazione polinomiale in λ ; si chiama *equazione caratteristica dell'equazione di Eulero* e corrisponde ad un'equazione algebrica di grado n .

i) $\lambda_1 \dots \lambda_n; t^{\lambda_1} \dots t^{\lambda_n}$

ii) se λ ha molteplicità m : $t^{\lambda}, (\log t)t^{\lambda}, (\log t)^2 t^{\lambda}, \dots, (\log t)^{m-1} t^{\lambda}$

esempio

$$t^4 z^{(4)} + 2t^3 z^{(3)} + 2t^2 z'' - 2t z' + 2z = 0$$

per vedere se è equazione di Eulero deve essere $z^{(k)} = t^k$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$$

equazione caratteristica di equazione di Eulero

$$(\lambda-1)^4 + (\lambda-1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{doppia}$$

$$\lambda_2 = 1 + i$$

$$\lambda_3 = 1 - i$$

$$t, t \log t, t^{1+i} \rightarrow t \cos(\log t), t^{1-i} \rightarrow t \sin(\log t)$$

$$t^z = e^{\log t^z} = e^{z \log t}$$

$$t \cdot t^{\pm i} = A e^{\pm i \log t} = A (\cos(\log t) \pm i \sin(\log t))$$

$$\text{Equazione di Bessel} \quad z'' - \frac{1}{t} z' + \left(1 - \frac{y^2}{t^2}\right) z = 0 \quad t \neq 0$$

$$\text{Equazione di Hermite} \quad z'' - tz' + \lambda z = 0$$

$$\text{Equazione di Laguerre} \quad tz'' + (1-t)z' + \lambda z = 0$$

$$\text{Equazione di Legantre} \quad (1-t^2)z'' - 2tz' + \lambda z = 0 \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$1) \quad \underline{y}' + A(t)\underline{y} = \underline{b}(t)$$

$$2) \quad \underline{z}' + A(t)\underline{z} = 0$$

$$\underline{W}(t) = (\underline{z}^1(t), \dots, \underline{z}^n(t))$$

integrale generale della (2): $z(t) = c_1 \cdot \underline{z}^1(t) + \dots + c_n \cdot \underline{z}^n(t) = \underline{W}(t) \cdot \underline{c}$

Metodo della variazione delle costanti (Lagrange)

cerchiamo soluzioni della (1) della forma $\underline{y}(t) = \underline{W}(t) \cdot \underline{c}(t) \Rightarrow \underline{y}'(t) = \underline{W}'(t)\underline{c}(t) + \underline{W}(t)\underline{c}'(t)$
 $\underline{W}'(t)\underline{c}(t) + \underline{W}(t)\underline{c}'(t) + A(t)\underline{W}(t)\underline{c}(t) = \underline{b}(t)$

$$(2') \quad \underline{W}'(t) + \underline{A}(t)\underline{W}(t) = 0 \Rightarrow \underline{c}'(t) = \underline{W}^{-1}(t)\underline{b}(t) \Rightarrow \underline{c}(t) = \int_{\tau}^t \underline{W}^{-1}(s)\underline{b}(s)ds$$

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{W}(t) \int_{\tau}^t \underline{W}^{-1}(s)\underline{b}(s)ds$$

$$\text{se } \underline{A} \text{ è costante } \tilde{\underline{y}}(t) = e^{At} \int_{\tau}^t e^{-As} \underline{b}(s)ds$$

soluzione problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \\ \underline{y}(t) = \underline{W}(t, \tau)\underline{\xi} + \underline{W}(t, \tau) \int_{\tau}^t \underline{W}^{-1}(s, \tau)\underline{b}(s)ds \end{cases}$$

$$\text{se } A \text{ è costante } \underline{y}(t) = e^{A(t-\tau)} \underline{\xi} + e^{A(t-\tau)} \int_{\tau}^t e^{A(\tau-s)} \underline{b}(s)ds = e^{A(t-\tau)} \underline{\xi} + e^{At} \int_{\tau}^t e^{-As} \underline{b}(s)ds$$

$$(1) \quad \underline{y}'(t) = \underline{A}(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad \underline{y}(t) = \underline{W}(t)\underline{c} + \tilde{\underline{y}}(t)$$

$$(2) \quad \underline{z}'(t) = \underline{A}(t)\underline{z}(t) \quad \underline{z}(t) = \underline{W}(t)\underline{c}$$

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{W}(t) \int_{\tau}^t \underline{W}^{-1}(s)\underline{b}(s)ds$$

se $\underline{A}(t) = \underline{A}$ costante, allora $\underline{W}(t) = e^{At}$

$$\tilde{\underline{y}}(t) = e^{At} \int_{\tau}^t e^{-As} \underline{b}(s)ds$$

$$(3) \quad y^{(n)}(t) = a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)y(t) + b(t)$$

$$(4) \quad z^{(n)}(t) = a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)z(t)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(t) \\ \tilde{y}'(t) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_W \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) \cdot \int_{\tau}^t \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} \underline{b}(s) ds$$

esempio

$$y'' + \omega^2 y = b(t)$$

$$z_1(t) = \cos(\omega t)$$

$$z_2(t) = \sin(\omega t)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

$$\det(W(t)) = \omega$$

$$W_{21} = -\sin(\omega t) \quad W_{22} = \cos(\omega t)$$

$$\tilde{y}(t) = \cos(\omega t) \int_{\tau}^t -\frac{\sin(\omega s)}{\omega} b(s) ds + \sin(\omega t) \int_{\tau}^t \frac{\cos(\omega s)}{\omega} b(s) ds$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_{\tau}^t \sin(\omega(t-s)) b(s) ds$$

Equazioni differenziali del secondo ordine (equazioni, sistemi, vettori)

Problema di Cauchy per le equazioni differenziali del secondo ordine (problema ai valori iniziali)

$$\begin{cases} y''(t) = a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \quad t \in I$$

teorema di Stwin-Lionville (problema ai valori del contorno)

$$\begin{cases} y''(t) = a_1(t)y'(t) + (a_2(t) + \lambda a_3(t))y(t) + b(t) \\ \gamma_0 y(\alpha) + \gamma_1 y(\beta) + \gamma_2 y'(\alpha) + \gamma_3 y'(\beta) = k_1 \\ \delta_0 y(\alpha) + \delta_1 y(\beta) + \delta_2 y'(\alpha) + \delta_3 y'(\beta) = k_2 \end{cases} \quad t \in I = (\alpha, \beta)$$

$$SL_0 : b(t) = 0; k_1 = 0; k_2 = 0$$

$$SL : \begin{cases} y'' + \omega^2 y = b(t) \\ y(0) - y(\pi) = 0 \\ y'(0) - y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$SL_0 : \begin{cases} z'' + \omega z = 0 \\ z(0) - z(\pi) = 0 \\ z'(0) - z'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Esempio di problema ai valori del contorno per un SL_0

$$\begin{cases} z'(t) = -\omega c_1 \sin(\omega t) + \omega c_2 \cos(\omega t) \\ z(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(0) = z(\pi) \\ z'(0) = z'(\pi) \end{cases} \begin{cases} c_1 = c_1 \cos(\omega\pi) + c_2 \sin(\omega\pi) \\ \omega c_2 = -\omega c_1 \sin(\omega\pi) + \omega c_2 \cos(\omega\pi) \end{cases} \begin{cases} c_1(1 - \cos(\omega\pi)) - c_2 \sin \omega\pi = 0 \\ c_1 \omega \sin(\omega\pi) + c_2 \omega(1 - \cos(\omega\pi)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos(\omega\pi) & -\sin(\omega\pi) \\ \omega \sin(\omega\pi) & \omega(1 - \cos(\omega\pi)) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\omega) = \omega(1 - \cos(\omega\pi))^2 + \omega(\sin(\omega\pi))^2 = 2\omega(1 - \cos(\omega\pi))$$

$$\Delta(\omega) = 0 \quad \text{se} \quad \omega = 2n$$

$$\omega^2 = 4n^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

- i) se $\omega^2 \neq 4n^2$
abbiamo $c_1 = c_2 = 0$
il problema omogeneo SL_0 ha solo la soluzione 0.
- ii) se $\omega^2 = 4n^2$
la matrice ha rango 0 poiché è fatta solo da 0.
Il problema ha ∞^2 soluzioni con c_1, c_2 arbitrarie.

Esempio di problema ai valori del contorno per un SL

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \tilde{y}(t) \\ c_1 + \tilde{y}(0) = c_1 \cos(\omega\pi) + c_2 \sin(\omega\pi) + \tilde{y}(\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} c_1(1 - \cos(\omega\pi)) - c_2 \sin(\omega\pi) = \tilde{y}(\pi) - \tilde{y}(0) \\ c_1 \omega \sin(\omega\pi) + c_2 \omega(1 - \cos(\omega\pi)) = \tilde{y}'(\pi) - \tilde{y}'(0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos(\omega\pi) & -\sin(\omega\pi) \\ \omega \sin(\omega\pi) & \omega(1 - \cos(\omega\pi)) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{y}(\pi) - \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}'(\pi) - \tilde{y}'(0) \end{vmatrix}$$

- i) se $\omega^2 \neq 4n^2$
abbiamo per $c_1 \neq c_2$ una sola soluzione (Cramer), perciò il sistema completo SL ammette una sola soluzione.
- ii) se $\omega^2 = 4n^2$
SL non ammette (in generale) alcuna soluzione. Però se i termini noti soddisfano le seguenti condizioni $\tilde{y}(0) = \tilde{y}(\pi)$ e $\tilde{y}'(0) = \tilde{y}'(\pi)$ allora il sistema ammette ∞^2 soluzioni ed allora il problema SL ammette ∞^2 soluzioni.

Problemi lineari

- 1) Principio di sovrapposizione
- 2) Principio dell'alternativa

Il teorema di esistenza e unicità afferma che o valgono entrambe o mancano entrambe.

Equazioni differenziali ordinarie non lineari

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}) \\ \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases} \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Spazio (vettoriale) lineare sul campo Λ

$$X : x, y, z, \dots \quad \Lambda : \lambda, \mu, \dots$$

$$\text{le operazioni valide sono} \begin{cases} x + y \\ \lambda x \end{cases}$$

spazio metrico

$$X : x, y, z, \dots$$

- $d : X + X \rightarrow \mathbb{R} : d(x, y)$ distanza metrica

- 1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ disuguaglianza triangolare

- $X = \mathbb{R}^n \quad x = (x_1 \dots x_n) \quad y = (y_1 \dots y_n)$

i) $d_2(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

ii) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

iii) $d_\infty(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$

- $X = C^0([a, b])$

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \max |x(t) - z(t)| + \max |z(t) - y(t)|$$

$$\max |x(t) - y(t)| \leq \max |x(t) - z(t)| + \max |z(t) - y(t)|$$

questa è una buona definizione di distanza per le funzioni continue.

- La metrica ha come conseguenza la TOPOLOGIA dello spazio (X, d) metrico.

Definizione di intorno

Intorno di un punto x di raggio r

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Intorno di una funzione continua $x(t)$, di raggio r

Successione negli spazi metrici

$$(X, d) \quad x_n \rightarrow x \text{ in } X \text{ se } d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

$$X = \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \quad x_n \rightarrow x \text{ se } |x_n - x| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$X = C^0([a, b]) \quad x_n \rightarrow x \text{ se } d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{cioè se } \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0$$

Convergenza uniforme

fissato $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) : |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ se $n > N \forall t \in [a, b]$

Convergenza puntuale

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \quad |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ per } n > N$$

Criterio di Cauchy (necessario e sufficiente)

(X, d) spazio metrico

$$\{x_n\} \text{ convergente: } \exists x \in X : d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

$$\{x_n\} \text{ fondamentale: } d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \text{ per } n, m \rightarrow \infty$$

- tutte le successioni convergenti sono fondamentali

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_0 + \underbrace{d(x, x_m)}_0 \Rightarrow \text{è fondamentale}$$

- Tutte le successioni fondamentali sono convergenti solo in \mathbb{R}^n .
- In uno spazio metrico generico, non è detto che tutte le successioni fondamentali siano convergenti.
- Uno spazio metrico si dice completo se tutte le successioni fondamentali sono convergenti.
 - Per tutti gli spazi metrici completi vale il criterio di Cauchy.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione x_n sia convergente è che sia fondamentale.

esempi

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

$$\mathbb{Q} : d(x, y) = |x - y|$$

$$\mathbb{R} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

successione convergente in $C^0([a, b])$

$$x_n(t) : \exists x(t) \in C^0([a, b]) : \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

cioè convergenza uniforme

successione fondamentale in $C^0([a, b])$

$$x_n(t) : \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x_m(t)| \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

lo spazio $C^0([a, b])$ è completo

la metrica che abbiamo usato è detta *metrica di Lagrange*

Applicazioni tra spazi metrici X, Y spazi metrici $F : X \rightarrow Y$

esempio

 $X = C^0([a, b]), Y = \mathbb{R}$ $F = \int_a^b x(t) dt$

Questa è un'applicazione tra spazi metrici.

Ad ogni funzione viene associato un numero reale

Esempio2

 $X = C^1([a, b]), Y = C^0([a, b])$ $X \ni x \rightarrow x \in Y$ **Applicazioni continue**una funzione è *continua* in \tilde{x} se $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$ $F : X \rightarrow Y$ è *continua* se $\lim_{X_n \rightarrow X} F(X_n) = F(X)$ **Applicazioni Lipschiziane**Una funzione si dice Lipschiziana se $d(F(x), F(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$ il rapporto incrementale è limitatose $L < 1$ l'applicazione si dice *contrazione*.**Riassumendo** (X, d) spazio metrico $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 1) $d(x, y) \geq 0 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 2) $d(x, y) = d(y, x)$ 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ $\mathbb{R}^n, C^0([a, b])$ $d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ tipologia: intorno: $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ limite: $x_n \rightarrow x : d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty$ in $C^0([a, b]) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ significa che $x_n(t)$ converge a $x(t)$ **Unicità del limite**successione convergente $\exists x \in X : d(x, y) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$ successione fondamentale $d(x_n, x_m) \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$ convergente \Rightarrow fondamentale fondamentale $\not\Rightarrow$ convergente (X, d) è completo se convergente \Leftrightarrow fondamentale**F continua** $F : X \rightarrow Y$ F continua: $x_n \rightarrow x \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x) \quad \lim F(x_n) = F(\lim x_n)$ **F lipschiziana (lip)** $d(F(x), F(y)) \leq L \cdot d(x, y)$

Teorema delle contrazioni (Banach, Caccioppoli) X spazio metrico completo $F: X \rightarrow X$ contrazione \Rightarrow in X esiste un unico punto fisso, cioè $F(x) = x$

- 1) unicità: $F(x_1) = x_1 \quad F(x_2) = x_2$
 $d(x_1, x_2) = d(F(x_1), F(x_2)) \leq \rho \cdot d(x_1, x_2) \quad [0 < \rho < 1]$
- 2) esistenza: metodo delle approssimazioni successive
 $x_n \in X, X_{n+1} = F(x_n)$
- 1) $\{x_n\}$ è fondamentale
- 2) $x_n \rightarrow \tilde{x}: F(\tilde{x}) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim X_{n+1} = \tilde{X}$

Spazio lineare normato $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ disuguaglianza triangolare
 $d(x, y) = \|x - y\|$

Spazio lineare normato completo (spazio di Banach) $C^0([a, b]) \quad d(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)| \quad \|x\| = \max_t |x(t)|$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases}$$

 $\underline{f}(t, \underline{y})$ continua in D $\underline{f}(t, \underline{y})$ lipschiziana rispetto a \underline{y} uniformemente in t

$$\|\underline{f}(t, \underline{y}) - \underline{f}(t, \underline{x})\| = L \|\underline{y} - \underline{x}\|$$

 L costante indipendente da $t \forall (t, x) \times (t, y) \in D$

$$\underline{y}(t) = \underline{\xi} + \int_{\tau}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

$$\underline{F}(\underline{y}) = \underline{\xi} + \int_{\tau}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \quad \Rightarrow \quad \underline{F}(\underline{y}) = \underline{y}$$

$$\begin{cases} \underline{y} \in C^0(I_d) \\ \text{grafico di } \underline{y} \in \Gamma \end{cases} \quad \text{questo è il nostro spazio metrico}$$

$$1) \quad F: Y \rightarrow Y \quad \|\underline{F}(\underline{y}) - \underline{\xi}\| = \left| \int_{\tau}^t \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \right| \leq \int_{\tau}^t \|\underline{f}(s, \underline{y}(s))\| ds \leq M |t - \tau|$$

$$|t - \tau| < a \quad \left| \underline{\xi} - \underline{y} \right| < b \quad M = \max \underline{f}$$

2) F contrazione

$$\|\underline{F}(\underline{x}) - \underline{F}(\underline{y})\| = \left| \int_{\tau}^t \underline{f}(s, \underline{x}(s)) - \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \right| = \int_{\tau}^t L \|\underline{x} - \underline{y}\| = L \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

$$\text{se } d < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right) \text{ la soluzione c'è ed è unica } \begin{cases} Md < b & d < \frac{b}{M} \\ Ld < 1 & d < \frac{1}{L} \end{cases}$$

Senza continuità non esiste (in generale) alcuna soluzione

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(t) \\ \underline{y}(\tau) = \underline{\xi} \end{cases} \quad \underline{f}(t) \text{ ha una discontinuità di } 1^\circ \text{ specie in } t = \tau$$

se $\underline{f}(t, \underline{y})$ continua, esiste una soluzione, ma (in generale) manca l'unicità

Enunciato di regolarità

$$\begin{cases} f \in C^k(D) & \Rightarrow & y \in C^{k+1}(I_d) \\ f \in C^\infty(D) & \Rightarrow & y \in C^\infty(I_d) \\ f \text{ analitica} & \Rightarrow & y \text{ analitica} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} y' = \frac{t+2}{t^2+y^2} & y''(t) = \frac{t^2+y^2 - (t+2)(2t+2yy')}{(t^2+y^2)^2} \\ y(0) = 1 & y''(0) = \frac{1-2 \cdot 4}{1} = -7 \end{cases}$$

$$y(t) = y(0) + t \cdot y'(0) + \frac{t^2}{2} y''(0) + o(t^2)$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -7 \end{cases} \quad y = 1 + 2t - \frac{7}{2}t^2 + o(t^2)$$

Prolungamento

Esiste un intervallo massimale destro e un intervallo massimale sinistro

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} & \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} & \begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \\ y(x) = \tan x & y(x) = \frac{1}{1-t} & y(x) = \frac{1}{1+t} \end{array}$$

$\underline{f}(t, \underline{y})$ continua in S

$\underline{f}(t, \underline{y})$ localmente lipschiziana in \underline{y} , uniforme rispetto a t nella striscia S

$$|\underline{f}(t, \underline{y})| \leq k_1 + k_2 |\underline{y}| \quad \text{allora} \quad \underline{y} \in C^1([a, b])$$

$f(t, y)$ derivabile rispetto a \underline{y} in D.

Sistemi lineari

$$\begin{cases} y' = \underline{A}(t)y + \underline{b}(t) \\ y(t) = \underline{\xi} \end{cases}$$

$$\underline{A}(t), \underline{b}(t) \in C^0([a, b])$$

$$|\underline{f}(t, \underline{y})| \leq |\underline{A}(t)y + \underline{b}(t)| \leq |\underline{A}(t)y| + |\underline{b}(t)| \leq k_2 |y| + k_1$$

Dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dai parametri

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{se } (\tau_x, \underline{\xi}_x) \rightarrow (\tau_0, \underline{\xi}_0) \\ & \underline{y}_k(t, \tau_k, \underline{\xi}_k) \rightarrow y_0(t, \tau_0, \underline{\xi}_0) \\ & \text{uniformemente in } I_d \end{aligned}$$

$$\underline{y}' = \underline{f}(t, y, \underline{\lambda}) \quad \underline{y}(\tau) = \underline{\xi}$$

2) \underline{f} continua in $(t, y, \underline{\lambda})$

\underline{f} localmente lipschiziana rispetto a y e rispetto a $\underline{\lambda}$

uniformemente rispetto a t

se $\underline{\lambda}_n \rightarrow \underline{\lambda}$ le soluzioni $\underline{y}(t, \underline{\lambda}_n) \rightarrow \underline{y}(t, \underline{\lambda})$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(\tau) = \xi \end{cases} \quad \text{equazione del 1° ordine}$$

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(\tau) = \xi_1 \\ y'(\tau) = \xi_2 \end{cases} \quad \text{equazione del 2° ordine}$$

1) $f(t, y, y') = C$ (gravità)

2) $f(t, y, y') = -\omega^2 y$ (forza elastica)

3) $f(t, y, y') = hy' + ky + g(t)$ (forza elettrica+resistenza+forza esterna)

4) $y'' = f(y)$ (equazione autonoma)

- considerando y come variabile indipendente e $y' = p$ come funzione incognita $p = p(y)$

$$y'' = \frac{d}{dt} p = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dp}{dy} = p \cdot p'$$

$$p \cdot p' = f(y) \quad \Rightarrow \quad p \frac{dp}{dy} = f(y) \quad \Rightarrow \quad p \cdot dp = f(y) \cdot dy \quad \Rightarrow \quad \int p \cdot dp = \int f(y) dy$$

$$\begin{cases} p = p(y, C_1) \\ \frac{dy}{dt} = p(y, C_1) \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = \int dt \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{dy}{f(y, C_1)} + C_1$$

$$\frac{p^2}{2} = \int_y f(s) ds + C_1$$

se $f(s) = -\frac{dU}{ds}$ l'equazione si dice *conservatrice* e U si chiama *potenziale*.

$$T(y') = \frac{1}{2}(y')^2 \quad \text{energia cinetica}$$

$$U(y) = \quad \text{energia potenziale}$$

$$E(y, y') = T(y') + U(y)$$

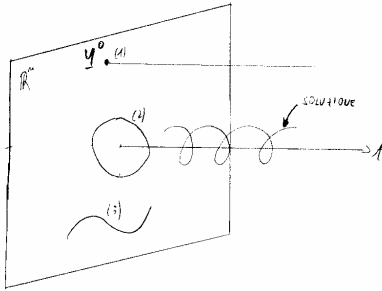
$$\bullet \quad \frac{d}{dt} E(y, y') = \frac{d}{dt} \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{d}{dt} \int_0^y f(s) ds = y' y'' - f(y) y' = y' \underbrace{(y'' - f(y))}_0 = 0$$

- Per i sistemi conservativi l'equazione del secondo ordine è possibile direttamente trasformarla in una del primo ordine.

Sistemi lineari autonomi

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$$

nei sistemi lineari autonomi la variabile t non compare esplicitamente



$t \rightarrow \underline{y}(t)$ la \underline{y} si chiama variabile di stato

il piano \mathbb{R}^n dove giacciono le proiezioni delle soluzioni si chiama piano delle fasi.

(1),(2)e(3) sono le proiezioni della soluzione (una curva in \mathbb{R}^{n+1}) sul piano delle fasi, dette anche orbite o traiettorie.

La descrizione della famiglia delle orbite si chiama ritratto di fase.

Proprietà generali delle orbite

1. $\underline{\varphi}(t)$ definita in $[\tau_1, \tau_2]$ è soluzione

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t + c) \text{ è una soluzione } \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\psi}'(t) = \underline{\varphi}'(t + c) = \underline{f}(\underline{\varphi}(t + c)) = \underline{f}(\underline{\psi}(t))$$

ogni traslata temporale di una soluzione è ancora una soluzione, definita in un altro intervallo; quindi l'orbita non si riferisce solo ad una soluzione, ma anche a tutte le sue traslate temporali.

2. $\underline{\varphi}(t)$ definita in $[\tau_1, \tau_2]$ è soluzione

$\underline{\psi}(t)$ è soluzione se $\underline{\varphi}(t_1) = \underline{\psi}(t_2)$; risulta quindi che le due soluzioni siano una la traslata dell'altra.

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\psi}(t + t_2 - t_1)$$

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\varphi}(t + t_1 - t_2)$$

$$\underline{\psi}(t) \text{ è soluzione} \Rightarrow \underline{\psi}(t_1) = \underline{\varphi}(t_2) = \underline{\varphi}(t_1)$$

Casi tipici

1. soluzioni di equilibrio

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \text{ se } \underline{y}': \underline{f}(\underline{y}^0) = 0$$

orbita: *punto (critico)*

2. soluzioni periodiche

$$\underline{\varphi}(t) \text{ definite per } t \in \mathbb{R}; \exists T > 0: \underline{\varphi}(t + T) = \underline{\varphi}(t) \quad \forall t \text{ e inoltre } \underline{\varphi}(t + \tau) \neq \underline{\varphi}(t) \text{ se } 0 < \tau < T$$

orbita: *ciclo (curva semplice chiusa)*

3. le soluzioni non appartengono ai primi due casi

orbite: *curve semplici non chiuse*

Costanti del moto (integrali primi)

$$E(\underline{y}) = E(\underline{y}(t))$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial E}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial E}{\partial y_n} y_n' = \langle \nabla E, \underline{y}' \rangle = \langle \nabla E, \underline{f}(\underline{y}) \rangle$$

queste sono le *derivate lungo la traiettoria* o *derivate di Lie*.

se $\frac{dE}{dt} = 0 \quad \forall \underline{y}$ allora E è una costante del moto.

Esempi in dimensione 1

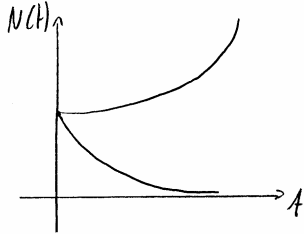
Modello di Malthus (dinamica delle popolazioni)

$N(t)$	numero di individui presenti all'istante t
λ	numero di nuovi nati per individuo per unità di tempo
$\lambda \cdot N(t) \cdot h$	numero di nuovi nati nel tempo $[t, t + h]$
μ	numero di morti per individuo per unità di tempo
$\mu \cdot N(t) \cdot h$	numero di morti nel tempo $[t, t + h]$

$\lambda - \mu = \varepsilon$ potenziale biologico

$$N(t+h) = N(t) + \lambda \cdot N(t) \cdot h - \mu \cdot N(t) \cdot h$$

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu)N(t)$$



$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t)$ modello differenziale della evoluzione della popolazione

l'unico punto di equilibrio è l'origine $N(t) = 0$ poiché se la popolazione all'inizio è nulla, resterà sempre nulla.

L'integrale generale dell'equazione è $N(t) = C \cdot e^{\varepsilon t}$

Modello di Verhulst (equazione logistica)

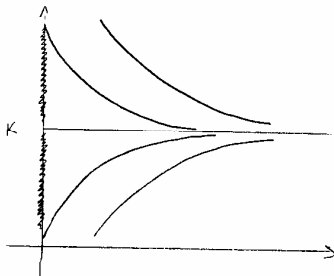
$$N'(t) = \varepsilon \cdot N(t) \left(1 - \frac{1}{k} N(t) \right)$$

$$\frac{k \cdot dN}{\varepsilon N(k - N)} = dt \quad \int \frac{k \cdot dN}{\varepsilon N(k - N)} = \int dt = t + c$$

$$\frac{1}{N(k - N)} = \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{k - N} \right) \frac{1}{k} \quad \int \frac{dN}{N(k - N)} = \frac{1}{k} (\log N - \log |k - N|) = \frac{1}{k} \log \left| \frac{N}{k - N} \right|$$

$$N(t) = \frac{kN_0 e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0 e^{\varepsilon t}}$$

se partiamo da $N_0 = k$ si rimane così poiché è una posizione di equilibrio, ovviamente anche $N(t) = 0$ è un punto di equilibrio.



Le altre orbite possibili sono solo 2. Comunque le soluzioni possibili sono infinite poiché ci sono poi tutte le soluzioni traslate.

Riassumendo: abbiamo 2 punti di equilibrio e 2 orbite.

Occorre distinguere tra punti di equilibrio attrattivi (che attirano le orbite) e punti di equilibrio repulsivi (che respingono le orbite).

Esempi in dimensione 2

Ricorda

Un sistema si dice conservativo se $f(y)$ è la derivata di un potenziale $\int_0^y f(s) ds$

Energie

$$y'' = f(y)$$

$$y = y_1 \quad y' = y_2$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(y_1) \end{cases}$$

$$T(y_2) = \frac{1}{2} y_2^2 \quad \text{energia cinetica}$$

$$U(y_1) = -\int_0^{y_1} f(s) ds \quad \text{energia potenziale}$$

$$E = T + U \quad \text{energia totale}$$

dobbiamo dimostrare che E è un integrale primo del moto

$$\frac{dE}{dt}(y) = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = y_2 \cdot y_2' - f(y_1) y_1'$$

ma se guardiamo il sistema che abbiamo scritto all'inizio viene

$$y_2 \cdot f(y_1) - f(y_1) \cdot y_2 = 0$$

$$E(y_1, y_2) = \text{costante}$$

Modello di Lotke-Volterra (preda-predatore)

$$x(t) \quad \text{numero di prede} \quad a, b, c, d > 0$$

$$y(t) \quad \text{numero di predatori}$$

$$\begin{cases} x' = a - by \\ y' = -c + dx \end{cases}$$

punto di equilibrio $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema

$$\frac{x'}{x}(-c + dx) = (a - by)(-c + dx)$$

$$\frac{y'}{y}(a - by) = (-c + dx)(a - by)$$

$$-c \frac{x'}{x} + dx' - a \frac{y'}{y} + by' = 0$$

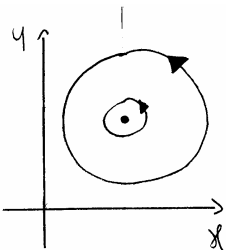
$$\frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{1}{x} x'$$

$$\frac{d}{dt} (-c \log x + dx - a \log y + by) = 0$$

l'integrale generale è: $E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by = C$

$$\begin{cases} E_{xx} = \frac{c}{x^2} > 0 \\ E_{yy} = \frac{a}{y^2} > 0 \\ E_{xy} = E_{yx} = 0 \end{cases}$$

La matrice Hessiana delle derivate seconde è $H = \begin{vmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{vmatrix}$



il punto è un punto di minimo; tutte le soluzioni sono periodiche, sono dei cicli.

$x(t), y(t)$ periodiche con periodo $T = T(c)$

$$0 = \log x \Big|_0^T = \int_0^T \frac{x'}{x} dt = \int_0^T (a - by) dt = aT - b \int_0^T y(t) dt$$

$$0 = \log y \Big|_0^T = \int_0^T \frac{y'}{y} dt = \int_0^T (-c + dx) dt = -cT + d \int_0^T x(t) dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} \quad \text{numero medio di predatori}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d} \quad \text{numero medio di prede}$$

se si ferma la pesca per un certo periodo:

aumenta il tasso di crescita delle prede

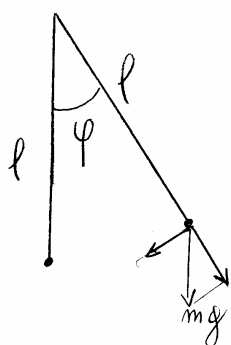
$$a \rightarrow a + \varepsilon$$

diminuisce il tasso di diminuzione dei predatori	$c \rightarrow c - \delta$
il numero medio dei predatori quindi diventa	$\frac{a + \varepsilon}{b}$
il numero medio delle prede diventa quindi	$\frac{c - \delta}{d}$

come si può vedere ciò avvantaggia i predatori.

Tutto ciò servì a spiegare come mai durante la guerra mondiale aumentarono i predatori e non le prede.

Moto del pendolo



$$F = ma$$

$$mg \sin \varphi = ml\varphi''$$

$$\varphi'' = -k \sin \varphi \quad \text{con } k = g/l$$

$$\text{per piccole oscillazioni: } \varphi'' = -k\varphi \text{ poiché } \varphi \approx \sin \varphi$$

$$\text{il sistema è conservativo} \quad -\frac{dU}{ds} = -k \sin s$$

$$U(s) = k \int_0^\varphi \sin s \cdot ds = k(1 - \cos \varphi)$$

la forza deriva da un potenziale

$$\begin{cases} z_1 = \varphi \\ z_2 = \varphi' \end{cases} \quad \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -k \sin z_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{angolo} \\ \text{velocità angolare} \end{array}$$

costruiamo nello spazio delle fasi z_1 e z_2

i punti di equilibrio sono

$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ -k \sin z_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_1 = n\pi \end{cases}$$

quindi i punti di equilibrio sono infiniti $(n\pi, 0)$ $n \in \mathbb{Z}$

studiamo per $z_1 \in [-\pi, +\pi]$

i punti di equilibrio in questo intervallo sono $(-\pi, 0)(0, 0)(+\pi, 0)$

Studiamo ora l'energia

$$E(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + k(1 - \cos z_1) = C \quad \geq 0 \quad \text{è l'energia cinetica ed è una costante del moto.}$$

Studiamo le orbite

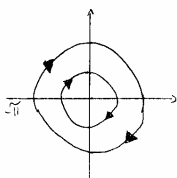
$$z_2 = \pm \sqrt{2(c - k + k \cos z_1)}$$

1° caso $c = 0$

$$z_2 = \pm \sqrt{-k + k \cos z_1} \quad \left(\frac{1}{2} z_2^2 + k(1 - \cos z_1) = 0 \right)$$

l'orbita si riduce ad un punto di equilibrio $(0, 0)$

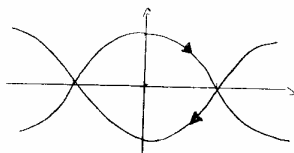
2° caso $0 < c < 2k$



$$\text{con } c = k \quad z_2 = \pm \sqrt{2k \cos z_1}$$

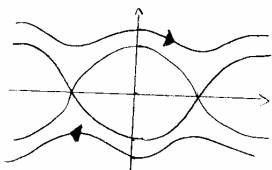
non è sempre definito poiché la radice potrebbe risultare anche negativa

3° caso $c = 2k$



$$z_2 = \pm \sqrt{2(k + k \cos z_1)}$$

4° caso $c > 2k$



tutto ciò significa che se noi diamo al pendolo una energia pari a $2k$ il pendolo arriva verticale.

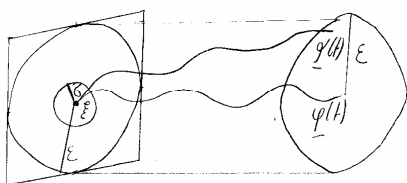
Stabilità di una soluzione

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y})$$

problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) = \underline{\xi} \end{cases} \quad \underline{\xi} \rightarrow \underline{y}(t, \underline{\xi})$$

continuità: $x_n \rightarrow x$ se $F(x_n) \rightarrow F(x)$



- $\varphi(t)$ è stabile se: fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$$\text{se } |\underline{y} - \underline{\xi}| < \delta \text{ allora } |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

se il punto iniziale sta dentro al cerchio di raggio δ allora tutta la soluzione sta dentro al cerchio di raggio ε .

- $\varphi(t)$ è asintoticamente stabile se

$$\text{risulta: } |\psi(t) - \varphi(t)| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

- negli altri casi $\varphi(t)$ si dice instabile
- se la soluzione di equilibrio \underline{y}^0 è asintoticamente stabile si chiama *bacino di attrazione* l'insieme dei punti \underline{y} tali che: $|\psi(t) - \underline{y}^0| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$
- se questo insieme coincide con tutto lo spazio delle fasi la soluzione di equilibrio \underline{y}^0 si dice globalmente asintoticamente stabile.

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \quad \text{punto di equilibrio } \underline{y}^0 : \underline{f}(\underline{y}^0) = \underline{0}$$

$$\text{poniamo } \underline{z}(t) = \underline{y}(t) - \underline{y}^0 \quad \underline{z}'(t) = \underline{f}(\underline{z}(t) + \underline{y}^0) = \underline{g}(\underline{z})$$

$\underline{z} = \underline{0}$ è un punto di equilibrio

Sistemi lineari autonomi – stabilità delle soluzioni (1)

$$\underline{y}' = A\underline{y}$$

stabilità delle soluzioni $\underline{y} = \underline{0}$

1) autovalori regolari

i) n autovalori reali e distinti

$$c_1 \cdot \underline{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \underline{h}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \cdot \underline{h}^n e^{\lambda_n t}$$

n autovalori a coppie coniugati

$$\underline{h} e^{\lambda t} + \overline{\underline{h}} e^{\overline{\lambda} t}$$

ii) autovettori anche multipli ma con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica ($m=d$).

Liapunov

- 1) $\Re \lambda_i (i = 1 \dots n) < 0 \Leftrightarrow \underline{0}$ è punto globalmente asintoticamente stabile
- 2) $\Re \lambda_i \leq 0, \underline{0}$ è punto stabile
- 3) se c'è un solo valore per cui $\Re \lambda_i > 0, \underline{0}$ è un punto instabile.

2) autovalori non regolari

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 t^2 e^{\lambda t} + \dots$$

il teorema di Liapunov vale anche per autovalori non regolari

La prima e la terza affermazione rimangono inalterate.

La seconda cambia così: gli autovalori con parte reale=0 devono essere regolari affinché valga l'affermazione di Liapunov.

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \quad \underline{f}(0) = \underline{0}$$

Stabilità delle soluzioni (2)

- 1) stabile
- 2) asintoticamente stabile; il punto dove convergono tutte le soluzioni è detto "bacino di attrazione"
- 3) instabile

Per i sistemi lineari $\underline{y}' = A\underline{y}$ vale il **Teorema di Liapunov**

- 1) A possiede solo autovalori regolari
 - a. se $\text{Re } \lambda_j < 0 \Rightarrow 0$ è asintoticamente globalmente stabile $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \underline{h}^1 e^{\lambda_1 t}, \underline{h}^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \underline{h}^n e^{\lambda_n t} \end{array} \right.$ quando $t \rightarrow +\infty$ le soluzioni vanno a 0 se $\lambda_j < 0$
 - b. se $\text{Re } \lambda_j \leq 0$ (almeno un autovalore ha $\text{Re } \lambda_j = 0$) $\Rightarrow 0$ è stabile ma non asintoticamente poiché $e^0 = 1 \Rightarrow$ la soluzione si avvicina all'origine ma non la raggiunge
 - c. instabile negli altri casi
- 2) A possiede qualche autovalore non regolare λ autovalore (doppio) non regolare $\underline{c}^1 e^{\lambda t} + \underline{c}^2 t e^{\lambda t}$
 - a. se $\text{Re } \lambda_j < 0$ non cambia nulla rispetto al caso 1.a
 - b. se $\text{Re } \lambda_j \leq 0$
 - i. se l'autovalore non regolare ha $\text{Re} = 0$ è instabile
 - ii. se l'autovalore non regolare ha $\text{Re} < 0$ è stabile
 - c. instabile negli altri casi

Comportamento delle orbite nell'intorno dell'origine

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ck + dy \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det A \neq 0$$

- 1) λ_1 e λ_2 reali e distinti
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2$
- 3) λ_1 e λ_2 complessi coniugati

l'origine è un punto di equilibrio

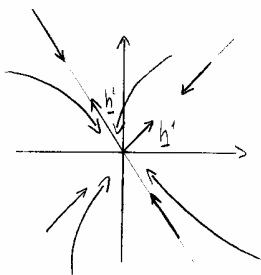
caso 1)

autovalori λ_1, λ_2 reali e distinti

l'integrale generale è: $c_1 \underline{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \underline{h}^2 e^{\lambda_2 t}$

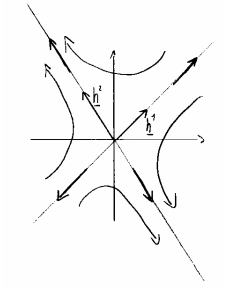
- a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

l'origine attira le traiettorie, l'origine è un nodo a due tangenti (stabile)



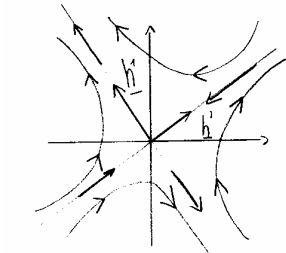
b) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

l'origine è un nodo a due tangenti (instabile)



c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

l'origine è un colle o sella a due tangenti (instabile)



caso 2)

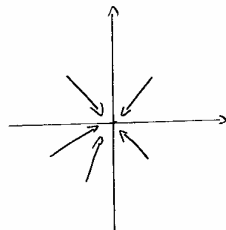
autovalori doppi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

a) autovalori doppi regolari:

l'integrale generale è: $c_1 \underline{h}^1 e^{\lambda t} + c_2 \underline{h}^2 e^{\lambda t} = \underline{c} e^{\lambda t}$

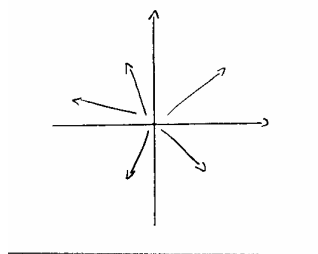
i) $\lambda < 0$

l'origine è un nodo stella (stabile)



ii) $\lambda > 0$

l'origine è un nodo stella (instabile)

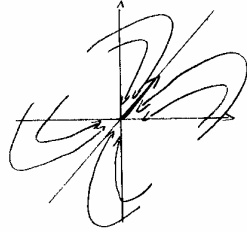


b) autovalori doppi non regolari:

l'integrale generale è: $c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$

$\lambda < 0$

l'origine è un nodo a una tangente (asintoticamente stabile)



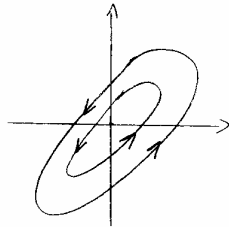
caso 3)

l'integrale generale è: $c_1 h e^{\alpha + i\beta t} + c_2 \bar{h} e^{\alpha - i\beta t}$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

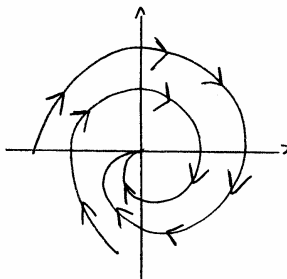
a) $\alpha = 0$ (Re = 0)

l'origine è un centro (stabile)



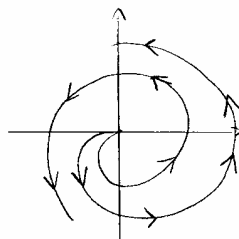
b) $\alpha < 0$ (Re < 0)

l'origine è un fuoco (asintoticamente stabile)



c) $\alpha > 0$ (Re > 0)

l'origine è un fuoco (instabile)



Riassunto

$$\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = cx + d \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tr}A = a + d \quad \Delta = (\text{tr}A)^2 - 4|A|$$

$$\begin{array}{l} 1) \quad \Delta > 0 \\ 2) \quad \Delta = 0 \\ 3) \quad \Delta < 0 \end{array} \begin{cases} |A| > 0 \\ |A| < 0 \\ \begin{cases} b^2 + c^2 \neq 0 \\ b = c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \text{tr}A = 0 \\ \text{tr}A \neq 0 \end{cases} \end{cases} \begin{array}{l} \text{nodo} \\ \text{colle} \\ \text{nodo} \\ \text{stella} \\ \text{centro} \\ \text{fuoco} \end{array} \begin{cases} \begin{cases} \text{tr}A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ \text{tr}A > 0 & \text{instabile} \end{cases} \\ \text{instabile} \\ \begin{cases} \text{tr}A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ \text{tr}A > 0 & \text{instabile} \end{cases} \\ \text{stabile} \\ \text{stabile} \\ \begin{cases} \text{tr}A < 0 & \text{asintoticamente stabile} \\ \text{tr}A > 0 & \text{instabile} \end{cases} \end{cases}$$

Funzione di Liapunov

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \quad \underline{f} \text{ di classe } C^1(\Omega)$$

$$\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$$

si chiama funzione di Liapunov riferita a questo sistema una funzione V di classe C^1 in un intorno A di $\underline{0}$;

$V(\underline{0}) = 0$	$V(\underline{y}) > 0$	$\forall y \in A, y \neq 0$
$V'(\underline{y}) \leq 0$	\forall traiettoria	

$$\frac{dV(\underline{y})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i} y_i' = V'(\underline{y}) = \langle \nabla V, \underline{f}(\underline{y}) \rangle \leq 0$$

Teorema (di Liapunov)

1) se esiste una funzione di Liapunov, con le proprietà indicate, associata al nostro sistema, allora l'origine è stabile

2) se inoltre $V'(\underline{y}) < 0$ allora l'origine è asintoticamente stabile

3) se V è definita in tutto \mathbb{R}^n , e l'origine è l'unica soluzione di equilibrio, e $\lim_{|\underline{y}| \rightarrow \infty} V(\underline{y}) = +\infty$ allora

l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Esempio

Se il sistema è lineare $\underline{y}' = A\underline{y}$ allora una funzione di Liapunov è data da: $V(\underline{y}) = |\underline{y}|^2$

$$\frac{d}{dt} |\underline{y}|^2 = 2 \langle \underline{y}, A\underline{y} \rangle$$

$$\left[\nabla |\underline{y}|^2 = \nabla (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n) = 2\underline{y} \right]$$

questa è una forma quadratica $(\sum a_{ik} y_i y_k)$

noi vogliamo sapere il segno della nostra forma quadratica, se A è definita negativa, l'origine è asintoticamente stabile.

Metodo di Linearizzazione

l'idea di base è di approssimare il problema non lineare in uno lineare approssimando la curva (non lineare) con una retta (lineare) che nel caso sarà la retta tangente nell'intorno del punto y_0 .

$$\underline{y}' = \underline{f}(\underline{y}) \quad \underline{f} \text{ di classe } C^1; \underline{f}(\underline{y}^0) = \underline{0}$$

$$\underline{f}(\underline{y}) = \underline{f}(\underline{y}^0) + J_{\underline{f}}(\underline{y}^0)(\underline{y} - \underline{y}^0) + o(|\underline{y} - \underline{y}^0|)$$

ricorda

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$ funzione scalare ad una variabile

$f(\underline{y}) = f(\underline{y}_0) + \nabla f'(\underline{y})(\underline{y} - \underline{y}_0) + \dots$ funzione scalare a n variabili

$\underline{f}(\underline{y}) =$ funzione vettoriale a n variabili

$$\underline{f}(\underline{y}) = \underbrace{f(\underline{y}_0) + J_{\underline{f}}(\underline{y}_0)(\underline{y} - \underline{y}_0)}_{\text{approssimazione lineare}} + o(\|\underline{y} - \underline{y}_0\|)$$

sistema linearizzato nell'intorno del punto \underline{y}^0

$$\underline{y}' = J_{\underline{f}}(\underline{y}^0) \cdot (\underline{y} - \underline{y}^0)$$

posto $\underline{z} = \underline{y} - \underline{y}^0$ $A = J_{\underline{f}}(\underline{y}^0)$

$$\Rightarrow \underline{z}' = A\underline{z}$$

Affermazioni attorno al teorema di Liapunov

1) se l'origine è asintoticamente stabile per (L) allora è asintoticamente stabile anche per (NL)

2) se esiste un autovalore positivo di A (e dunque l'origine non è stabile per (L)) allora è instabile anche per (NL)

esempio: pendolo con attrito

$$\varphi'' + k \sin \varphi + h\varphi' = 0 \quad k, h > 0$$

pendolo senza attrito

$$z_1 = \varphi \quad z_2 = \varphi'$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -k \sin z_1 - h z_2 \end{cases}$$

$$E(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + (k - k \cos z_1)$$

$$\frac{dE}{dt} = z_2 \cdot z_2' + k \sin z_1 \cdot z_1' = z_2 (z_2' + k \sin z_1) = -h z_2^2 < 0$$

i punti di equilibrio sono: $(0,0)$ $(\pi,0)$ $(-\pi,0)$

sistema linearizzato in $(0,0)$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -k z_1 - h z_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix} \quad |A| = k > 0 \quad \text{tr}A = -h < 0 \quad \Delta = h^2 - 4k$$

1. $h^2 \geq 4k$ attrito forte, l'origine è un nodo asintoticamente stabile, il pendolo non oscilla, arriva in basso e si ferma (all'infinito).

2. $h^2 < 4k$ attrito debole, l'origine è un fuoco asintoticamente stabile, l'orbita si avvolge a spirale verso l'origine, il pendolo fa oscillazioni sempre più limitate finchè non si ferma (all'infinito).

Sistema linearizzato in $(+\pi,0)$

$$\underline{f}(\underline{z}) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -k \sin z_1 - h z_2 \end{pmatrix}$$

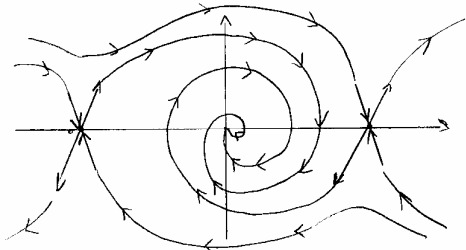
$$J_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k \cos z_1 & -h \end{pmatrix}$$

$$J_f(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = k z_1 - h z_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} |A| &= -k < 0 \\ \text{tr}A &= -h \\ \Delta &= h^2 + 4k > 0 \end{aligned} \right\}$$

$(\pi, 0)$ è instabile per il sistema linearizzato, è un colle. Poiché esiste un autovalore positivo, il punto considerato è instabile anche per il sistema non lineare (NL).



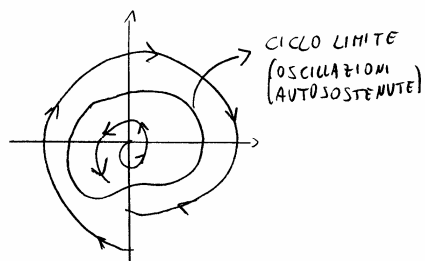
Equazione di Van der Pol

$$y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0 \quad \varepsilon > 0$$

se l'oscillazione è piccola, viene aumentata

se l'oscillazione è grande, viene diminuita

si può immaginare che il moto risulti periodico, l'orbita sarà del tipo



si può anche immaginare che tutte le orbite si stabilizzino attorno all'orbita limite

$$E(y, y') = \frac{1}{2}y'^2 + \frac{y^2}{2} \frac{dE}{dt} = y'y'' + yy' = y'(y'' + y) = \varepsilon(1 - y^2)y'^2$$

l'energia cambia di segno continuamente ma non arriva mai a 0 e non arriva mai a ∞ .

$$z = y' + \varepsilon \left(\frac{y^3}{3} - y \right) \quad \text{che è la primitiva dell'equazione}$$

$$\begin{cases} z' = -y \\ y' = z - \varepsilon \left(\frac{y^3}{3} - y \right) \end{cases}$$

punti di equilibrio $(0,0)$

sistema linearizzato al punto di equilibrio

$$\begin{cases} y' = z + \varepsilon y \\ z' = -y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} |A| &= 1 > 0 \\ \text{tr}A &= \varepsilon > 0 \\ \Delta &= \varepsilon^2 - 4 \end{aligned} \right\}$$

l'origine è sempre instabile poiché $\text{tr}A > 0$

ogni orbita che parte dall'origine se ne allontana

ogni orbita che parte dall'infinito si avvicina

tuttavia né l'una né l'altra si possono allontanare o avvicinare più di tanto, o meglio, non possono superare una "orbita limite".

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vettore delle variabili

la più generale delle equazioni differenziali del primo ordine è $F(y, y', t) = 0$

la più generale delle equazioni differenziali alle derivate parziali è $F(u_{x_1 x_1}, u_{x_2 x_2}, \dots, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u, \vec{x}) = 0$

Esempio (a due sole variabili)

$u(x, y) : u_x = 0$ è la più semplice equazione di questo tipo

se $u(x, y) = g(y)$ allora $g(y)$ è soluzione poichè $g(y)_x = 0$

Equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x})u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(\vec{x})u_{x_i} + a(\vec{x})u = f(\vec{x})$$

del secondo ordine significa che si deriva parzialmente due volte la funzione per una stessa variabile.

Equazione differenziale alle derivate parziali in due variabili

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y)$$

Le soluzioni di queste equazioni sono definite in una zona del piano

$$a_{ij}(\vec{x}), a_i(\vec{x}), a(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

la parte che conta di più dell'espressione precedente è la parte con le derivate seconde

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x})u_{x_i x_j} \quad (\text{formula generale, n variabili})$$

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} \quad (\text{formula generale, due variabili})$$

costruiamo la matrice:
$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

$$a(x, y)\xi_1^2 + 2b(x, y)\xi_1\xi_2 + c(x, y)\xi_2^2 \quad (\text{formula per gli autovalori, due variabili})$$

$$\sum a_{ij}(\vec{x})\xi_i\xi_j \quad (\text{formula per gli autovalori, n variabili})$$

chiamiamo *indice di inerzia* $T = \#\lambda_i < 0$ il numero di autovalori negativi

chiamiamo *indice di difetto* $D = \#\lambda_i = 0$ il numero di autovalori nulli

1. $T = n$ o $T = 0$		equazione ellittica
2. $T = n - 1$ o $T = 1$	$D = 0$	equazione iperbolica
3. $T = n - 1$ o $T = 0$	$D = 1$	equazione parabolica

Equazione ellittica

Descrive problemi al contorno o stazionari

$$\Delta u = f \quad \text{nell'insieme } \Omega$$

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = f(\vec{x}) \quad (\text{n dimensioni})$$

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (\text{due dimensioni})$$

$$a = 1, b = 0, c = 1 \quad \text{due autovalori positivi, uno nullo}$$

l'equazione dà la forma della membrana del dominio.

L'equazione ellittica ha bisogno di:

$$\text{condizioni al bordo} \quad \begin{cases} u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \end{cases} \quad x \in \partial\Omega$$

la prima formula del sistema è detta formula di Dirichlet, la seconda formula del sistema è detta formula di Neumann (**Formula di Dirichlet-Neumann**).

Equazione parabolica

$$u_t - \underbrace{(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n})}_{\Delta_x u} = f$$

Esempio

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad u_t - u_{xx} = f$$

la seconda è detta equazione di diffusione.

L'equazione parabolica ha bisogno di:

<u>Condizione iniziale</u>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\vec{x}, 0) = h(\vec{x}) \end{array} \right.$	$x \in \Omega$	
<u>Condizioni al bordo</u>	$\left\{ \begin{array}{l} u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \end{array} \right.$	$x \in \partial\Omega$	(Dirichlet-Neumann)

Equazione iperbolica

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}) = f \quad (\text{n dimensioni})$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f \quad (\text{due dimensioni})$$

è l'equazione che regola la propagazione delle onde.

L'equazione iperbolica ha bisogno di:

condizione iniziale $\left\{ \begin{array}{l} u(\vec{x}, 0) = h(\vec{x}) \end{array} \right.$

velocità iniziale $\left\{ \begin{array}{l} u_t(\vec{x}, 0) = k(\vec{x}) \end{array} \right.$

condizioni al bordo $\left\{ \begin{array}{l} u = \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \end{array} \right.$

esempio: membrana di un tamburo o corda di una chitarra

due variabili $u_{tt} - u_{xx} = f$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ \frac{\partial u}{\partial n} \end{array} \right. \quad \text{su } \partial\Omega \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) \\ u_t(x, y, 0) \end{array} \right.$$

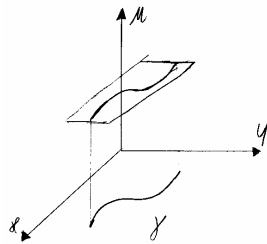
Problema di Cauchy

Consiste nel trovare tra tutte le possibili soluzioni quella che passa per una certa linea

$$\gamma: \left\{ \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array} \right.$$

$$0 \leq s \leq l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \\ u = \varphi(s) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u|_{\gamma} = \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma} = \psi \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum a_{ij}(\vec{x}) \xi_i \xi_j > 0 (< 0) \\ \Phi(\vec{x}) = 0 \end{array} \right.$$

se un'equazione è ellittica la sommatoria sarà sempre o maggiore o minore di 0.

L'equazione	$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{x}) = 0 \\ \sum a_{ij}(\vec{x}) \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} = 0 \end{array} \right.$	per le funzioni a n variabili
	$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = 0 \\ a(x, y) F_x^2 + 2b(x, y) F_x F_y + c(x, y) F_y^2 = 0 \end{array} \right.$	per le funzioni a due variabili

rappresenta l'equazione della superficie caratteristica.
(La superficie caratteristica soddisfa questa equazione)

Teorema di esistenza ed unicità

se a_{ij}, a_i, a sono funzioni analitiche (svilupparli in serie di Taylor)

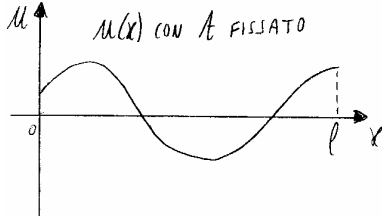
se γ è analitica

se γ non è mai tangente a una linea caratteristica

allora $\exists!$ soluzione che verifica il problema di Cauchy.

Equazione delle onde

$$u(x,t) \rightarrow u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$



consideriamo
$$\begin{cases} t \geq 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \end{cases}$$

ciò corrisponde ad una corda molto lunga (idealmente infinita) in modo che non ci dobbiamo preoccupare delle condizioni al contorno.

Cerchiamo l'integrale generale di tale equazione:

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \omega(\xi, \eta)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \omega_{\xi} + \omega_{\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -v\omega_{\xi} + v\omega_{\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \omega_{\xi\xi} + 2\omega_{\xi\eta} + \omega_{\eta\eta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \omega_{\xi\xi} - 2v^2 \omega_{\xi\eta} + v^2 \omega_{\eta\eta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4v^2 \omega_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \omega_{\xi\eta} = 0 \quad (\text{le costanti si possono eliminare})$$

$$\text{sappiamo che } (\omega_{\xi})_{\eta} = 0 \quad \omega_{\xi} = \Phi(\xi) \quad \omega(\xi, \eta) = \int \phi(\xi) d\xi + \psi(\eta)$$

ϕ, ψ sono due funzioni arbitrarie

$$\Rightarrow \omega(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali è la somma di due funzioni arbitrarie esplicite delle variabili ξ e η .

$$u(x,t) = p(x-vt) + q(x+vt)$$

p, q due funzioni arbitrarie di classe C^2

risolviamo ora il problema di Cauchy della corda:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 & t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = h(x) & \text{posizione iniziale} \\ u_t(x,0) = k(x) & \text{velocità iniziale} \end{cases}$$

$$p(x) + q(x) = h(x) \quad 1^\circ \text{ condizione}$$

$$u_t(x,0) = -vp'(x) + vq'(x) = k(x) \quad 2^\circ \text{ condizione}$$

$$(\text{derivata da } u_t(x,t) = p'(x-vt)(-v) + q'(x+vt)(v) = -vp'(x-vt) + vq'(x+vt))$$

$$\begin{cases} p'(x) + q'(x) = h'(x) \\ k(x) = vq'(x) - vp'(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} vp'(x) + vq'(x) = vh'(x) \\ k(x) = vq'(x) - vp'(x) \end{cases}$$

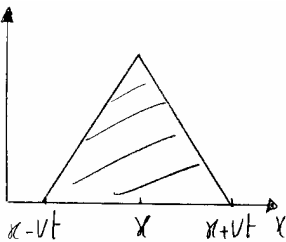
$$2vq'(x) = k(x) + vh'(x) \quad (\text{somma delle due equazioni})$$

$$\begin{cases} q(x) = \frac{1}{2v} \int_0^x k(s) ds + C + \frac{1}{2} h(x) \\ p(x) = -\frac{1}{2v} \int_0^x k(s) ds - C + \frac{1}{2} h(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} k(s) ds - C + \frac{1}{2} h(x-vt) + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} k(s) ds + C + \frac{1}{2} h(x+vt)$$

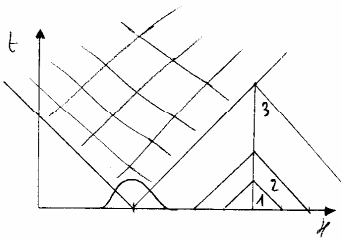
$$u(x,t) = \frac{1}{2} [h(x-vt) + h(x+vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} k(s) ds$$

ciò che abbiamo trovato è chiamato: **formula di D'Alambert** o **equazione della corda vibrante**
struttura della soluzione



la parte tratteggiata è chiamata *dominio di dipendenza della soluzione dai dati*

le perturbazioni della corda si propagano lungo la corda con velocità finita v



la parte tratteggiata è chiamata *dominio di influenza dei dati sulla soluzione*

nel tempo 1 ancora la soluzione è nulla, la corda in quel punto non si muove ancora, l'onda non è ancora arrivata. Stesso discorso vale per il tempo 2. nel tempo 3 invece la soluzione non è più nulla.

Si fa l'integrale dell'onda moltiplicato per il triangolo 3 e si ricava la soluzione. Ovviamente il risultato sarà l'area dell'onda che è sottesa al triangolo 3.

Le altezze dei vari triangoli (1,2,3 nel nostro caso) sono i tre istanti di tempo in cui calcolo la soluzione. Ovviamente ci sarà solo un istante di tempo in cui avrò come risultato (area dell'onda) tutta l'onda, il massimo dell'onda passa in quel punto solo in un istante di tempo; poi non torna più.

Teorema di D'Alambert

se $h \in C^2(\mathbb{R})$, allora la funzione $u(x,t) \rightarrow u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ è di classe $C^2(\mathbb{R})$ ed è l'unica soluzione del problema di Cauchy (C).

Corda bloccata ai due estremi

Il problema di Cauchy si scrive:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, t \geq 0 \\ u(x,0) = h(x) \\ u_t(x,0) = k(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

il nome completo è problema di Cauchy-Dirichlet

Cauchy per le normali condizioni di passaggio della funzione, Dirichlet per le condizioni al contorno.

Il fatto che l'equazione sia lineare e omogenea ci consente di usare il principio di sovrapposizione degli effetti per le equazioni lineari omogenee.

Per risolvere questo problema si cercano soluzioni a variabili separate; cerchiamo soluzioni particolari della forma:

$$\begin{cases} u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \\ u_{tt} = X(x) \cdot T''(t) \\ u_{xx} = X''(x) \cdot T(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \cdot T''(t) - v^2 X''(x) \cdot T(t) = 0$$

$$\frac{T''}{T} - v^2 \frac{X''}{X} = 0 \quad \frac{T''}{T} = v^2 \frac{X''}{X}$$

l'equazione è stata separata, al primo membro la funzione di una sola variabile, a secondo membro la funzione dell'altra sola variabile.

Tuttavia questa uguaglianza, come si può vedere, vale solo se $\frac{T''}{T}$ e $\frac{X''}{X}$ siano 2 costanti.

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \text{ (costante)}$$

$$\begin{cases} T'' = v^2 \lambda T \\ X'' = \lambda X \end{cases}$$

quindi da una equazione alle derivate parziali del secondo ordine siamo arrivati ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Le soluzioni di questo sistema sono:

$$\text{se } \lambda > 0 \quad T(t) = e^{v\sqrt{\lambda}t}, e^{-v\sqrt{\lambda}t} \quad X(x) = e^{\sqrt{\lambda}lx}, e^{-\sqrt{\lambda}lx}$$

$$\text{se } \lambda < 0 \quad T(t) = \sin(v\sqrt{|\lambda|}t), \cos(v\sqrt{|\lambda|}t) \quad X(x) = \sin(\sqrt{|\lambda|}lx), \cos(\sqrt{|\lambda|}lx)$$

si osserva facilmente che nel caso $\lambda > 0$ le soluzioni si possono tutte scartare, infatti due sono soluzioni illimitate che vanno all'infinito, due sono soluzioni che tendono a zero velocemente.

Ci interessa quindi solo il caso $\lambda < 0$.

$$\text{La soluzione è} \quad X(x) = a \sin(\sqrt{|\lambda|}lx) + b \cos(\sqrt{|\lambda|}lx)$$

$$\text{Sostituiamo le condizioni al bordo} \quad \begin{cases} X(0) = 0 & \Rightarrow b = 0 \\ X(l) = 0 & \Rightarrow \sin(\sqrt{|\lambda|}l) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sapendo che} \quad \lambda = -\omega^2 \text{ e quindi } \sqrt{|\lambda|} = \omega$$

$$\text{Otteniamo gli autovalori} \quad \omega_k = \frac{k\pi}{l} \quad k = 1, 2, \dots$$

a questo punto abbiamo una quantità di soluzioni a variabili separate che soddisfano le condizioni al contorno, però dobbiamo soddisfare anche le condizioni di passaggio (di Cauchy)

$$\begin{cases} \sin(\omega_k x) \cdot \sin(v\omega_k t) \\ \sin(\omega_k x) \cdot \cos(v\omega_k t) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega_k x) \sin(v\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k x) \cos(v\omega_k t)$$

- Se le serie convergono, questa è la soluzione dell'equazione
- Questa serie soddisfa le condizioni al bordo poiché singolarmente ogni funzione soddisfa le condizioni al bordo
- Ci manca solo da soddisfare la soluzione iniziale

$$\begin{cases} h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k x) \\ k(x) = v \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k \sin(\omega_k x) \end{cases}$$

$h(x)$ e $k(x)$ sono assegnate tra 0 ed 1 (C.I.); b_k sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo della funzione di soli seni (dispari).

Tuttavia la nostra corda non è una funzione dispari. Significa che dobbiamo prolungare la corda in maniera che sia dispari $-l < x < l$, la funzione diventa periodica di periodo $2l$.

Ora possiamo sviluppare la funzione in termini di soli seni

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^l p(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$$

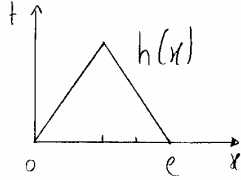
stesso discorso per il coefficiente a_k

$$a_k = \frac{1}{vl} \int_0^l k(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx$$

una volta trovati i coefficienti si controlla la convergenza e se la serie converge allora abbiamo trovato le soluzioni.

Esempio

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$



$$a_k = 0 \quad \text{poichè } k(x) = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{2l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)} & k \text{ dispari} = 2n+1 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{2n+1}{l} \pi x\right) \cos\left(v \frac{2n+1}{l} \pi t\right)$$

questa serie converge poiché seno e coseno maggiorano a 1, il fattore iniziale $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ converge ad un numero finito.

Proviamo a vedere com'è la corda nel tempo $t = \frac{l}{2v}$

Poi continua ad oscillare tra sotto e sopra con lo stesso periodo.

